bifie | standardisierte

reifeprüfung

Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe
Auf dem Weg zur standardisierten
kompetenzorientierten Reifeprüfung

Teil 2

Information für Lehrer/innen der AHS

Bundes institut
bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung
des österreichischen Schulwesens

Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe

Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung

Teil 2

Impressum

Herausgeber:

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung
des österreichischen Schulwesens
Stella-Klein-Löw-Weg 15 / Rund Vier B
1020 Wien

Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe
Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 2
BIFIE (Hrsg.), 2013

Einbandgestaltung: Die Fliegenden Fische, Salzburg
& Andreas Kamenik, BIFIE | Zentrales Management & Services
Layout & Satz: Stefan Terler, BIFIE | Zentrales Management & Services
Redaktion & Lektorat: Alexander Ruprecht & Stefan Terler, BIFIE | Zentrales Management & Services

Autorinnen und Autoren:

Gustav Breyer
Helmut Heugl
Michaela Kraker
Marlies Liebscher
Ilse Liegl (Illustrationen)
Christa Preis
Hans-Stefan Siller
Evelyn Süß-Stepancik
Erich Svecnik

Inhalt

Hinweise

Hinweise für die Benutzung des Praxishandbuchs

Bedeutung der Icons:

Verweis auf Abschnitt des Praxishandbuchs

Kommentar

Tipps für die Praxis

Verweis auf die entsprechende Klasse

Vorwort

Mathematik als ein sinnvolles und brauchbares Instrument ihrer/seiner unmittelbaren Lebenswelt erkennen und einsetzen zu können – dazu soll Mathematikunterricht die allgemein gebildete Bürgerin/den allgemein gebildeten Bürger befähigen, so das bildungstheoretische Konzept der neuen Mathematik-Reifeprüfung.

Teil 2 des *Praxishandbuchs Mathematik AHS Oberstufe* stellt eine weitere Maßnahme zur Unterstützung von Lehrerinnen und Lehrern bei der Verwirklichung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts und der Vorbereitung auf die schriftliche Reifeprüfung dar. Er erweitert und vertieft die in Teil 1 (BIFIE, 2011) ausgeführten theoretischen Fundierungen des Konzepts und liefert praktische Tipps von Lehrerinnen und Lehrern für einen kompetenzorientierten Unterricht.

Im ersten Abschnitt werden die mathematischen Grundkompetenzen (gemäß Konzept) und ihre Einreihung in die Schulstufen sowie eine Gegenüberstellung Lehrplan – Grundkompetenzen als Übersicht präsentiert. Typ-1- und Typ-2-Aufgaben werden hinsichtlich ihrer Einordnung in das Konzept der bildungstheoretischen Orientierung analysiert und mit einer didaktischen Brille betrachtet.

Der zweite Abschnitt widmet sich schwerpunktmäßig dem Aufbau von Problemlösekompetenz. Dabei werden sowohl heuristische Strategien als auch Lernlinien zum Kompetenzaufbau ausführlich und anhand von Beispielen dargestellt. Zudem wird in diesem Abschnitt der Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht als didaktisches Prinzip erläutert. Ein weiterer Beitrag liefert tiefere Einblicke in den Inhaltsbereich *Wahrscheinlichkeit und Statistik*.

Weiterführende Literaturhinweise runden den Band ab.

Das Praxishandbuch steht in einer Reihe fachdidaktischer Veröffentlichungen und Publikationen mit Anschauungs- und Übungsmaterialien für den Unterricht, die über die Website des BIFIE (https://www.bifie.at) zugänglich sind. Dort finden sich auch Hinweise zu den organisatorischen Aspekten der standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung sowie zu Fragen der Leistungsbeurteilung auf dem aktuellen Stand.

Informationen zu den rechtlichen Grundlagen der standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung in Mathematik sowie von Autorinnen und Autoren aus dem Kreis der Landesschulaufsicht in Kooperation mit dem BIFIE publizierte *Hinweise und Empfehlungen zur Erstellung von Mathematikschularbeiten in der AHS-Oberstufe* sind über die Website des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur (http://www.bmukk.gv.at) abrufbar.

Mit herzlichen Grüßen

Mag. Peter Simon, MSc
Leiter des Departments Standardisierte kompetenzorientierte
Reife- und Diplomprüfung

1 Auf dem Weg zur neuen Reifeprüfung

1.1 Mathematische Grundkompetenzen für die SRP in der AHS

In der nachfolgenden Tabelle sind die Grundkompetenzen der SRP den Schulstufen zugeordnet. Sie sind nach Inhalten aufgelistet, als Handlungen beschrieben, welche an bestimmten Inhalten ausgeführt werden, und basieren auf den auf der Website des BIFIE abrufbaren Grundkompetenzen (BIFIE, 2013a).

Das dunkel unterlegte Häckchen ✓ bedeutet, dass einer der Inhalte in der betreffenden Schulstufe neu ist.

Das hell unterlegte Häckchen ✓ bedeutet, dass die Inhalte auch in höheren Schulstufen wiederholt und gefestigt werden sollen.

Alle vorkommenden Parameter sind Elemente aus $\mathbb{R}$, falls nicht eine explizite Einschränkung vorliegt.

Die **Anmerkung** bei einzelnen Abschnitten oder einzelnen Grundkompetenzen soll helfen, den jeweiligen Interpretationsspielraum besser zu erkennen.

Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie* (AG)

AG 1	**Grundbegriffe der Algebra**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
AG 1.1	Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können	✓	✓	✓	✓
AG 1.2	Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme; Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit	✓	✓	✓	✓

Anmerkung:
Bei den Zahlenmengen soll man die Mengenbezeichnungen und die Teilmengenbeziehungen kennen, Elemente angeben sowie zuordnen können und die reellen Zahlen als Grundlage kontinuierlicher Modelle kennen. Zum Wissen über die reellen Zahlen gehört auch, dass es Zahlenbereiche gibt, die über $\mathbb{R}$ hinausgehen.
Die algebraischen Begriffe soll man anhand von einfachen Beispielen beschreiben/erklären und verständig verwenden können.

AG 2	**(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
AG 2.1	Einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können	✓	✓	✓	✓
AG 2.2	Lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können	✓	✓	✓	✓
AG 2.3	Quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können	✓	✓	✓	✓
AG 2.4	Lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können		✓	✓	✓
AG 2.5	Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können	✓	✓	✓	✓

Anmerkung:
Einfache Terme können auch Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Sinus etc. beinhalten. Umformungen von Termen, Formeln/Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen beschränken sich auf Fälle geringer Komplexität.

AG 3	**Vektoren**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
AG 3.1	Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können	✓	✓	✓	✓
AG 3.2	Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können	✓	✓	✓	✓
AG 3.3	Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können	✓	✓	✓	✓
AG 3.4	Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können	✓	✓	✓	✓
AG 3.5	Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können	✓	✓	✓	✓

Anmerkung:
Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können.
Die geometrische Deutung der Skalarmultiplikation (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) meint hier nur den Spezialfall $a \cdot b = 0$.
Geraden sollen in Parameterform, in $\mathbb{R}^2$ auch in parameterfreier Form, angegeben und interpretiert werden können.

AG 4	**Trigonometrie**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
AG 4.1	Definitionen von Sinus, Cosinus, Tangens im rechtwinkligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkliger Dreiecke einsetzen können	✓	✓	✓	✓
AG 4.2	Definitionen von Sinus, Cosinus für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können	✓	✓	✓	✓

Anmerkung:
Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.

Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten* (FA)

FA 1	**Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
FA 1.1	Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann	✓	✓	✓	✓
FA 1.2	Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und den Funktionstyp zuordnen können	✓	✓	✓	✓
FA 1.3	Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können	✓	✓	✓	✓
FA 1.4	Aus Tabellen, Graphen[1] und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können	✓	✓	✓	✓
FA 1.5	Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen	✓	✓	✓	✓
FA 1.6	Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können	✓	✓	✓	✓
FA 1.7	Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können	✓	✓	✓	✓
FA 1.8	Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können	✓	✓	✓	✓
FA 1.9	Einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können	✓	✓	✓	✓

Anmerkung:
Auf eine sichere Unterscheidung zwischen funktionalen und nichtfunktionalen Zusammenhängen wird Wert gelegt, auf theoretisch bedeutsame Eigenschaften (z. B. Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit) wird aber nicht fokussiert. Im Vordergrund stehen die Rolle von Funktionen als Modelle und die verständige Nutzung grundlegender Funktionstypen und deren Eigenschaften sowie der verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen (auch $f: A \to B, x \mapsto f(x)$).
Die Bearbeitung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen beschränkt sich auf die Interpretation der Funktionsgleichung im jeweiligen Kontext sowie auf die Ermittlung von Funktionswerten.
Das rechnerische Ermitteln von Schnittpunkten von Funktionen beschränkt sich auf jene Fälle, die durch die im Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie* angeführten Grundkompetenzen abgedeckt sind (lineare, quadratische Gleichungen).
Der Verlauf von Funktionen soll nicht nur mathematisch beschrieben, sondern auch im jeweiligen Kontext gedeutet werden können.

1 Der Graph einer Funktion ist als Menge der Wertepaare definiert. Einer verbreiteten Sprechweise folgend, nennen wir die grafische Darstellung des Graphen im kartesischen Koordinatensystem jedoch ebenfalls kurz „Graph“.

FA 2	**Lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
FA 2.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können	✓	✓	✓	✓
FA 2.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können	✓	✓	✓	✓
FA 2.3	Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können	✓	✓	✓	✓
FA 2.4	Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können: $f(x+1) = f(x) + k$; $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = f'(x)$	✓	✓	✓	✓
FA 2.5	Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können	✓	✓	✓	✓
FA 2.6	Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können	✓	✓	✓	✓

Anmerkung:
Die Parameter k und d sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

FA 3	**Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$ oder $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
FA 3.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können	✓	✓	✓	✓
FA 3.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können	✓	✓	✓	✓
FA 3.3	Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können	✓	✓	✓	✓
FA 3.4	Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = \frac{a}{x}$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können	✓	✓	✓	✓

Anmerkung:
Wurzelfunktionen bleiben auf den quadratischen Fall $a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$ beschränkt.

FA 4	**Polynomfunktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
FA 4.1	Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen	✓	✓	✓	✓
FA 4.2	Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können	✓	✓	✓	✓
FA 4.3	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können	✓	✓	✓	✓
FA 4.4	Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen	✓	✓	✓	✓

Anmerkung:
Der Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen sollte für beliebige n bekannt sein, konkrete Aufgabenstellungen beschränken sich auf Polynomfunktionen mit $n \leq 4$. Argumentwerte sollen aus Tabellen und Graphen, für Polynomfunktionen bis $n = 2$ und solchen, die sich durch einfaches Herausheben oder einfache Substitution auf quadratische Funktionen zurückführen lassen, auch aus der jeweiligen Funktionsgleichung ermittelt werden können.

FA 5	**Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
FA 5.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können		✓	✓	✓
FA 5.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 5.3	Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. e^{λ}) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können		✓	✓	✓
FA 5.4	Charakteristische Eigenschaften $f(x + 1) = b \cdot f(x)$; $(e^x)' = e^x$ kennen und im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 5.5	Die Begriffe „Halbwertszeit" und „Verdoppelungszeit" kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 5.6	Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können		✓	✓	✓

Anmerkung:
Die Parameter a und b (bzw. e^{λ}) sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

FA 6	Sinusfunktion, Cosinusfunktion	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
FA 6.1	Grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können		✓	✓	✓
FA 6.2	Aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 6.3	Die Wirkung der Parameter *a* und *b* kennen und die Parameter im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 6.4	Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können		✓	✓	✓
FA 6.5	Wissen, dass $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$		✓	✓	✓
FA 6.6	Wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$			✓	✓

Anmerkung:
Während zur Auflösung von rechtwinkligen Dreiecken Sinus, Cosinus und Tangens verwendet werden, beschränkt sich die funktionale Betrachtung (weitgehend) auf die allgemeine Sinusfunktion. Wesentlich dabei sind die Interpretation der Parameter (im Graphen wie auch in entsprechenden Kontexten) sowie der Verlauf des Funktionsgraphen und die Periodizität.

Inhaltsbereich *Analysis* (AN)

AN 1	Änderungsmaße	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
AN 1.1	Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können Anmerkung: Die Berechnung einfacher Differenzenquotienten ist/wird damit auch umsetzbar/möglich.		✓	✓	✓
AN 1.2	Den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane“ Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal und auch in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können			✓	✓
AN 1.3	Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können			✓	✓
AN 1.4	Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können				✓

Anmerkung:
Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzquotienten und durch Differentialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Veränderungsmaße im jeweiligen Kontext. Die Ermittlung des Differentialquotienten aus Funktionsgleichungen beschränkt sich auf Polynomfunktionen, Potenzfunktionen sowie auf die Fälle $[\sin(k \cdot x)]' = k \cdot \cos(k \cdot x)$, $[\cos(k \cdot x)]' = -k \cdot \sin(k \cdot x)$ und $[e^{k \cdot x}]' = k \cdot e^{k \cdot x}$.

AN 2	Regeln für das Differenzieren	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
AN 2.1	Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können; Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*)			✓	✓

Anmerkung:
Im Teil *Vernetzung von Grundkompetenzen* können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Differentiationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.

AN 3	**Ableitungsfunktion/Stammfunktion**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
AN 3.1	Den Begriff *Ableitungsfunktion/Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können			✓	✓
AN 3.2	Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können			✓	✓
AN 3.3	Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen			✓	✓
Anmerkung: Der Begriff der Ableitung(sfunktion) soll verständig und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden.					

AN 4	**Summation und Integral**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
AN 4.1	Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können				✓
AN 4.2	Einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)\mathrm{d}x$, $\int f(k \cdot x)\mathrm{d}x$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*); bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können Anmerkung: Im Teil *Vernetzung von Grundkompetenzen* können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Integrationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.				✓
AN 4.3	Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können				✓
Anmerkung: Analog zum Differentialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext. Die Berechnung bestimmter Integrale soll sich auf Polynomfunktionen beschränken.					

Inhaltsbereich *Wahrscheinlichkeit und Statistik* (WS)

WS 1	**Beschreibende Statistik**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
WS 1.1	Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können Anmerkung: (un-)geordnete Liste, Strichliste, Piktogramm, Säulen-, Balken-, Linien-, Stängel-Blatt-, Punktwolkendiagramm, Histogramm (als Spezialfall eines Säulendiagramms), Prozentstreifen, Kastenschaubild		✓	✓	✓
WS 1.2	Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können		✓	✓	✓
WS 1.3	Statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus; Quartile; Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können		✓	✓	✓
WS 1.4	Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können		✓	✓	✓

Anmerkung:
Wenn auch statistische Kennzahlen (für einfache Datensätze) ermittelt werden und elementare statistische Grafiken erstellt werden sollen, liegt das Hauptaugenmerk doch auf verständigen Interpretationen von Grafiken (unter Beachtung von Manipulationen) und Kennzahlen. Speziell für das arithmetische Mittel und den Median (auch als Quartilen) müssen die wichtigsten Eigenschaften (definitorische Eigenschaften, Datentyp-Verträglichkeit, Ausreißerempfindlichkeit) gekannt und verständig eingesetzt bzw. berücksichtigt werden. Beim arithmetischen Mittel sind allenfalls erforderliche Gewichtungen zu beachten („gewogenes arithmetisches Mittel“) und zu nutzen (Bildung des arithmetischen Mittels aus arithmetischen Mitteln von Teilmengen).

WS 2	**Wahrscheinlichkeitsrechnung**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
WS 2.1	Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können		✓	✓	✓
WS 2.2	Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können		✓	✓	✓
WS 2.3	Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können Anmerkung: Die Multiplikationsregel kann unter Verwendung der kombinatorischen Grundlagen und der Anwendung der Laplace-Regel (auch) umgangen werden.		✓	✓	✓
WS 2.4	Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können			✓	

WS 3	**Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
WS 3.1	Die Begriffe *Zufallsvariable*, *(Wahrscheinlichkeits-)Verteilung*, *Erwartungswert* und *Standardabweichung* verständig deuten und einsetzen können			✓	✓
WS 3.2	Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen			✓	✓
WS 3.3	Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann			✓	✓
WS 3.4	Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können				✓

Anmerkung:
Kennen und Anwenden der Faustregel, dass die Normalapproximation der Binomialverteilung mit den Parametern n und p dann anzuwenden ist und gute Näherungswerte liefert, wenn die Bedingung $n \cdot p \cdot (1 - p) \geq 9$ erfüllt ist. Die Anwendung der Stetigkeitskorrektur ist nicht notwendig und daher für Berechnungen im Zuge von Prüfungsbeispielen vernachlässigbar.
Kennen des Verlaufs der Dichtefunktion φ der Standardnormalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.
Arbeiten mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung und korrektes Ablesen der entsprechenden Werte.

WS 4	**Schließende/Beurteilende Statistik**	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
WS 4.1	Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekannten Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können				✓

1.2 Vergleich der Anforderungen des Lehrplans mit den SRP-Grundkompetenzen – 7. und 8. Klasse

Für den Bildungsauftrag des Faches Mathematik ist der Lehrplan maßgebend. Die SRP-Grundkompetenzen drücken den unverzichtbaren Kernbereich aus, der bei der standardisierten kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung verlangt wird.

Die folgende Tabelle soll diese Teilbereiche vor dem Hintergrund des Lehrplans für die 7. und 8. Klasse deutlich machen. Die Auflistung folgt dabei der Reihenfolge im Lehrplan.

Eine Version der Tabelle für die 5. und 6. Klasse findet sich im ersten Teil des Praxishandbuchs Mathematik AHS Oberstufe (BIFIE, 2011, S. 21–32).

Lehrplan 7. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen	AG Algebra und Geometrie AG 1 Grundbegriffe der Algebra
■ Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen	■ Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit
■ Reflektieren über die Zweckmäßigkeit des Erweiterns der reellen Zahlen ■ Rechnen mit komplexen Zahlen	■ Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können ■ -- **Anmerkung:** Bei den Zahlenmengen soll man die Mengenbezeichnungen und die Teilmengenbeziehungen kennen, Elemente angeben sowie zuordnen können und die reellen Zahlen als Grundlage kontinuierlicher Modelle kennen. Zum Wissen über die reellen Zahlen gehört auch, dass es Zahlenbereiche gibt, die über $\mathbb{R}$ hinausgehen. Die algebraischen Begriffe soll man anhand von einfachen Beispielen beschreiben, erklären und verständig verwenden können.
	FA Funktionale Abhängigkeit FA 4 Polynomfunktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$
■ *Kennenlernen des Fundamentalsatzes der Algebra*	■ Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

Lehrplan 7. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
Differentialrechnung	AN Analysis AN 1 Änderungsmaße
■ Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen	■ Den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane" Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal und auch in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können ■ Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können **Anmerkung:** Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzquotienten und durch Differentialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Veränderungsmaße im jeweiligen Kontext. Die Ermittlung des Differentialquotienten aus Funktionsgleichungen beschränkt sich auf Polynomfunktionen, Potenzfunktionen sowie auf die Fälle $[\sin(k \cdot x)]' = k \cdot \cos(k \cdot x)$, $[\cos(k \cdot x)]' = -k \cdot \sin(k \cdot x)$ und $[e^{k \cdot x}]' = k \cdot e^{k \cdot x}$.
	AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion
■ Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen	■ Den Begriff *Ableitungsfunktion/Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können ■ Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können
	FA Funktionale Abhängigkeiten FA 2 lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$
	■ Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können: $f(x+1) = f(x) + k$; $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = f'(x)$
	FA 5 Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$
	■ Charakteristische Eigenschaften $f(x+1) = b \cdot f(x)$; $(e^x)' = e^x$ kennen und im Kontext deuten können

Lehrplan 7. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
	FA 6 Sinusfunktion, Cosinusfunktion
	■ Wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$
	AN Analysis AN 1 Änderungsmaße
■ Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen	■ Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können
	AN 2 Regeln für das Differenzieren
■ Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)	■ Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*) **Anmerkung:** Im Teil *Vernetzung von Grundkompetenzen* können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Differentiationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.
	AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion
■ Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen	■ Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen
	FA Funktionale Abhängigkeiten FA 1 Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften
	■ Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen ■ Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können

Lehrplan 7. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
	FA 4 Polynomfunktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$
	■ Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen
■ Lösen von Extremwertaufgaben	■ --
■ Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit	■ --
■ *Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung*	■ --
Nichtlineare analytische Geometrie	--
■ Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen	■ --
■ Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten	■ --
■ Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen	■ --
■ *Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellungen*	■ --
Stochastik	WS Wahrscheinlichkeit und Statistik WS 3 Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)
■ Kennen der Begriffe diskrete Zufallsvariable und diskrete Verteilung ■ Kennen der Zusammenhänge von relativen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen; von Mittelwert und Erwartungswert sowie von empirischer Varianz und Varianz	■ Die Begriffe *Zufallsvariable*, *(Wahrscheinlichkeits-)Verteilung*, *Erwartungswert* und *Standardabweichung* verständig deuten und einsetzen können
	WS 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung
■ Arbeiten mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen	■ Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können

Lehrplan 7. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
	WS 3 Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)
	■ Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen ■ Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann

Lehrplan 8. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
	AN Analysis AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion
■ Ermitteln von Stammfunktionen	■ Den Begriff *Ableitungsfunktion/Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
	AN 4 Summation und Integral
■ Definieren des bestimmten Integrals, Deuten einer Summe von „sehr kleinen Produkten“ der Form $f(x) \cdot \Delta x$ als Näherungswert des bestimmten Integrals	■ Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können
	AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion
■ Kennen des Zusammenhangs zwischen Differenzieren und Integrieren sowie des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung	■ Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können

Lehrplan 8. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
	AN 4 Summation und Integral
■ Berechnen von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln	■ Einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)\mathrm{d}x$, $\int f(k \cdot x)\mathrm{d}x$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*); bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können **Anmerkung:** Im Teil *Vernetzung von Grundkompetenzen* können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Integrationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.
■ Arbeiten mit verschiedenen Deutungen des Integrals (insbesondere Flächeninhalt, Volumen, physikalische Deutungen)	■ Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können **Anmerkung:** Analog zum Differentialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext. Die Berechnung bestimmter Integrale soll sich auf Polynomfunktionen beschränken.
Dynamische Prozesse	AN Analysis AN 1 Änderungsmaße
■ Beschreiben von Systemen mit Hilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzengleichungen oder Differentialgleichungen ■ Untersuchen des dynamischen Verhaltens von Systemen	■ Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können
■ Lösen von einfachen Differentialgleichungen, insbesondere $y' = k \cdot y$	■ --
Stochastik	WS Wahrscheinlichkeit und Statistik
■ Kennen der Begriffe stetige Zufallsvariable und stetige Verteilung	■ --

Lehrplan 8. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
	WS 3 Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)
■ Arbeiten mit der Normalverteilung in andwendungsorientierten Bereichen	■ Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können **Anmerkung:** Kennen und Anwenden der Faustregel, dass die Normalapproximation der Binomialverteilung mit den Parametern n und p dann anzuwenden ist und gute Näherungswerte liefert, wenn die Bedingung $n \cdot p \cdot (1 - p) \geq 9$ erfüllt ist. Die Anwendung der Stetigkeitskorrektur ist nicht notwendig und daher für Berechnungen im Zuge von Prüfungsbeispielen vernachlässigbar. Kennen des Verlaufs der Dichtefunktion φ der Standardnormalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Arbeiten mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung und korrektes Ablesen der entsprechenden Werte.
	WS 4 Schließende Statistik/Beurteilende Statistik
■ Kennen und Interpretieren von statistischen Hypothesentests und von Konfidenzintervallen	■ Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekannten Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können
Wiederholung	--
■ umfassendes Wiederholen, Vertiefen und Vernetzen von Stoffgebieten	■ --

1.3 Didaktische Aspekte und Lösungsansätze für Typ-1- und Typ-2-Aufgaben

Für die Entwicklung der standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung in Mathematik an allgemeinbildenden höheren Schulen waren der Mathematik-Lehrplan der AHS-Oberstufe (BMUKK, 2004) und eine bildungstheoretische Fundierung, die den besonderen Stellenwert des Fachs Mathematik im Kanon der allgemeinbildenden Unterrichtsfächer verdeutlicht, ausschlaggebend (vgl. BIFIE, 2013a). Diese beiden Rahmenbedingungen hatten zur Folge, dass alle als wesentlich erachteten Bereiche mathematischer Kompetenzen der Schulmathematik identifiziert werden mussten. Auf diesem Weg war es möglich, eine echte Teilmenge des Lehrplans zu bestimmen, mit der die von den Schülerinnen und Schülern im Unterricht erworbene mathematische Grundbildung sowie ihr mathematisches Grundwissen im Rahmen der Abschlussprüfung überprüft werden können.

1.3.1 Aufbau der Klausur

Konzepte und Aufgabenformate

Die bei der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung vorzufindenden Aufgaben sind durch zwei unterschiedliche Charakterisierungen beschrieben. Die beiden Aufgabentypen sind von den Schülerinnen und Schülern in zwei voneinander getrennten Aufgabenheften (zuerst der Teil mit den Typ-1-Aufgaben, danach der Teil mit den Typ-2-Aufgaben) zu bearbeiten.

- Typ-1-Aufgaben sind Aufgaben, die auf die im Katalog angeführten Grundkompetenzen fokussieren. Bei diesen Aufgaben sind kompetenzorientiert (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten ohne darüber hinausgehende Eigenständigkeit nachzuweisen.
- Typ-2-Aufgaben sind Aufgaben zur Anwendung und Vernetzung der Grundkompetenzen in definierten Kontexten und Anwendungsbereichen. Dabei handelt es sich um umfangreichere kontextbezogene oder auch innermathematische Aufgabenstellungen, im Rahmen derer unterschiedliche Fragestellungen bearbeitet werden müssen und bei deren Lösung operativen Fertigkeiten gegebenenfalls größere Bedeutung zukommt. Eine selbstständige Anwendung von Wissen und Fertigkeiten ist erforderlich. Typ-2-Aufgaben können auch Komponenten enthalten, die einzelnen Grundkompetenzen zuordenbar sind.

Beide Aufgabentypen weisen im Zusammenhang mit der Leistungsfeststellung bei der Reifeprüfung innovative Kennzeichen auf. Für die Typ-1-Aufgaben wurden acht verschiedene Antwortformate – drei offene und fünf geschlossene – ausgewählt, um die oben genannten Charakteristika dieser Aufgaben bestmöglich umzusetzen (vgl. BIFIE, 2013a).

Offene Antwortformate

1. Das offene Antwortformat ist aus der gängigen Unterrichtspraxis hinlänglich bekannt. Es verlangt, dass die Antwort zur Aufgabenstellung mit eigenen Worten formuliert wird bzw. völlig frei erfolgen kann.

2. Das halboffene Antwortformat zeichnet sich dadurch aus, dass die korrekte Antwort oder ein vorgegebenes bzw. passendes mathematisches Objekt in eine vorgegebene Formel, Funktion etc. eingesetzt wird.

3. Beim Konstruktionsformat sind eine Aufgabe und deren Aufgabenstellung vorgegeben und es sollen in ein vorgegebenes Koordinatensystem (dessen Achsenskalierung nicht standardisiert ist) entsprechende Graphen, Punkte, Vektoren oder Ähnliches eingetragen werden. Derartige Aufgaben erfordern also die Ergänzung von Punkten, Geraden und/oder Kurven im Aufgabenheft.

Geschlossene Antwortformate

4. Das **Multiple-Choice-Aufgabenformat 2 aus 5** ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei zwei Antwortmöglichkeiten auszuwählen sind.

5. Das **Multiple-Choice-Aufgabenformat 1 aus 6** ist durch einen Fragenstamm und sechs Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei eine Antwortmöglichkeit auszuwählen ist.

6. Das **Multiple-Choice-Aufgabenformat x aus 5** ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei eine, zwei, drei, vier oder fünf Antwortmöglichkeiten auszuwählen sind. In der Aufgabenstellung finden die Schüler/innen stets die Aufforderung „Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n)/Gleichung(en) ... an!“.

7. Beim **Zuordnungsformat** sollen Informationen richtig zugeordnet werden. Dieses Antwortformat ist durch mehrere Aussagen (Tabellen, Abbildungen etc.) gekennzeichnet, denen mehrere Antwortmöglichkeiten gegenüberstehen.

8. Beim **Lückentext** ist das Antwortformat durch einen Satz mit zwei Lücken gekennzeichnet. Das heißt, im Aufgabentext sind zwei Stellen ausgewiesen, die ergänzt werden müssen. Für jede Lücke werden je drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben.

Die Vorteile der freien Formate liegen darin, dass Zufallslösungen kaum möglich sind, der Lösungsweg meist erkennbar nachvollzogen werden kann und kognitive Leistungen wie das Anwenden von (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten erfasst werden können (vgl. Moosbrugger & Kelava, 2012). Gleichzeitig sind diese Aufgaben aber in ihrer Korrektur anspruchsvoller. Beim Lückentext ergibt sich aufgrund der einschränkenden Vorgaben für die Schüler/innen der Vorteil, dass eine größere Sicherheit dahingehend besteht, was von der Kandidatin/vomKandidaten verlangt wird (vgl. Rost, 2004).

Dem Problem der Ratewahrscheinlichkeit bei geschlossenen Formaten kann auf verschiedene Art begegnet werden. Diese sinkt beispielsweise mit der Erhöhung der Anzahl der Antwortalternativen (vgl. Moosbrugger & Kelava, 2012). Der vielfach genannte Nachteil, dass derartige Aufgaben lediglich eine Rekonstruktionsleistung erfordern (vgl. ebd.) kann vor allem mit der Wahl geeigneter Distraktoren (Ablenker bzw. falsche Optionen) deutlich entschärft werden (vgl. Bühner, 2006). Dazu wird bei der Erstellung geschlossener Antwortformate besonders darauf geachtet, dass diese Aufgaben ein möglichst breites Spektrum der der angesprochenen Grundkompetenz zugrunde liegenden Teilaspekte enthalten und dass Reflexionswissen bzw. der verständige Umgang mit Begriffen und Konzepten erforderlich ist, um die Distraktoren erkennen zu können.

Die sogenannten Typ-2-Aufgaben erheben, wie die oben angeführte Charakterisierung zeigt, andere Ansprüche. Zur Realisierung dieser Ansprüche ist es notwendig, dass die einzelnen Teilaufgaben neben dem Operieren

- Reflexionsanlässe beinhalten sowie
- die Anwendung oder Vernetzung von Grundkompetenzen erfordern.

Daher werden bei Typ-2-Aufgaben geschlossene Aufgabenformate möglichst vermieden und freie Aufgabenformate bevorzugt eingesetzt.

Der in der Charakterisierung der Typ-2-Aufgaben angesprochene Kontextbezug führte zu einer Aufzählung von Kontexten, die ohne detaillierte Erklärung bei der standardisierten Reifeprüfung vorkommen können (vgl. BIFIE, 2013a, S. 19–22). Alle anderen Kontexte werden im einleitenden Text der Aufgabenstellung erklärt.

1.3.2 Exemplarische Aufgabenstellungen

Aufgaben und ihre Verankerung in der bildungstheoretischen Orientierung

Im SRP-Konzept sind in Summe 73 Grundkompetenzen aufgelistet und ausformuliert. Exemplarisch werden an dieser Stelle zwei Typ-1-Aufgaben zu je einer solchen Grundkompetenz aus dem Inhaltsbereich *Beschreibende Statistik* sowie aus dem Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie* und zwei Typ-2-Aufgaben, welche die bildungstheoretische Orientierung des Konzepts verdeutlichen, angeführt.

Aufgabe 1:

Typ-1-Aufgabe

Bevölkerungsprognose

In der angegebenen Tabelle der Statistik Austria ist die Bevölkerungsprognose für die österreichischen Bundesländer bis zum Jahr 2050 angegeben. Die Zahlenwerte geben die prozentuelle Veränderung der Bevölkerung jeweils in Bezug zu den Werten von 2010 wieder.

Bundesland	2015	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
Österreich	**2,1**	**4,0**	**5,7**	**7,2**	**8,5**	**9,7**	**10,8**	**11,6**
Burgenland	1,7	3,4	5,2	7,0	8,7	10,1	11,2	11,9
Kärnten	–0,1	–0,1	–0,1	–0,1	–0,3	–0,7	–1,3	–2,1
Niederösterreich	2,7	5,6	8,3	10,9	13,3	15,4	17,4	19,1
Oberösterreich	1,6	3,2	4,6	5,8	6,8	7,6	8,2	8,4
Salzburg	1,8	3,3	4,4	5,3	5,9	6,4	6,8	7,0
Steiermark	0,9	1,7	2,5	3,1	3,6	4,0	4,2	4,1
Tirol	2,3	4,3	5,8	7,3	8,4	9,5	10,4	11,0
Vorarlberg	2,7	5,0	6,8	8,5	9,9	11,1	12,2	13,0
Wien	3,2	6,1	8,4	10,5	12,4	14,4	16,4	18,2

Die im Jahr 2010 erhobenen Einwohnerzahlen sind nach Bundesländern dargestellt:

Burgenland	Kärnten	Niederösterreich	Oberösterreich	Salzburg	Steiermark	Tirol	Vorarlberg	Wien
284363	558955	1609772	1 412 252	530610	1209229	707485	369453	1705623

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Das Burgenland wird weitgehend konstante Bevölkerungszahlen verzeichnen.	☐
In Kärnten wird die Bevölkerung mittelfristig relativ konstant bleiben und sie wird langfristig etwas niedriger sein, als sie derzeit (2010) ist.	☐
Überdurchschnittlich starkes Bevölkerungswachstum wird für Niederösterreich und Wien prognostiziert.	☐
Die Bevölkerungszahl wird in Tirol von etwa 707 000 (2010) bis 2030 um 7,3 % auf etwa 759 000 ansteigen und bis zum Jahr 2050 um 11 % auf etwa 885 000 Personen anwachsen.	☐
Tirol wird weiterhin Bevölkerungszuwächse verzeichnen, die in etwa dem bundesweiten Trend entsprechen.	☐

Lösungsschlüssel

Das Burgenland wird weitgehend konstante Bevölkerungszahlen verzeichnen.	
In Kärnten wird die Bevölkerung mittelfristig relativ konstant bleiben und sie wird langfristig etwas niedriger sein, als sie derzeit (2010) ist.	☒
Überdurchschnittlich starkes Bevölkerungswachstum wird für Niederösterreich und Wien prognostiziert.	☒
Die Bevölkerungszahl wird in Tirol von etwa 707 000 (2010) bis 2030 um 7,3 % auf etwa 759 000 ansteigen und bis zum Jahr 2050 um 11 % auf etwa 885 000 Personen anwachsen.	
Tirol wird weiterhin Bevölkerungszuwächse verzeichnen, die in etwa dem bundesweiten Trend entsprechen.	☒

Lösungserwartung

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn genau die drei richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Die in der folgenden Aufgabe angesprochene Grundkompetenz aus dem Bereich *Beschreibenden Statistik* lautet (vgl. BIFIE, 2013a):

Bezug zu Grundkompetenzen des SRP-Konzepts	
WS 1.1	Werte aus tabellarischen und elementaren statistischen Grafiken ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können

Didaktischer Kommentar

Der kurze einleitende Text liefert bereits erste wichtige Informationen für die Lösung. „Die Zahlenwerte geben die prognostizierte prozentuelle Veränderung der Bevölkerung jeweils in Bezug zu den Werten von 2010 wieder." Die beiden tabellarischen Darstellungen können fürs Erste übersprungen werden, sie werden dann aber beim Lösen der Multiple-Choice-Aufgabe wichtig. Den nächsten wichtigen Hinweis gibt die Aufgabenstellung selbst. „Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!" Es können also eine bis fünf Antwortmöglichkeiten richtig sein und daher muss jede einzelne Aussage auf ihre Richtigkeit hin überprüft werden.

Dazu

- muss die erste Tabelle zeilenweise gelesen werden können,
- müssen die für die Aussage relevanten Werte identifiziert und
- im Zusammenhang interpretiert werden können.

Um zu entscheiden, ob die vierte Aussage „Die Bevölkerungszahl wird in Tirol von etwa 707 000 (2010) bis 2030 um 7,3 % auf etwa 759 000 ansteigen und bis zum Jahr 2050 um 11 % auf etwa 885 000 Personen anwachsen" zutreffend ist oder nicht, müssen die Schüler/innen

- nun auch die zweite Tabelle heranziehen und erkennen, dass der Ausdruck „von etwa 707 000" dem gerundeten Wert 707 485 entspricht und
- mittels (Prozent-)Rechnung den Wahrheitsgehalt der prognostizierten Einwohnerzahl überprüfen.

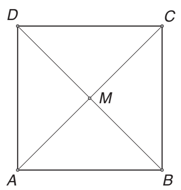
Diese Ausführungen illustrieren die Intention der Typ-1-Aufgaben sehr anschaulich. Das verständige Lesen und Interpretieren statistischer Darstellungen kann nicht auswendig gelernt werden.

Aufgabe 2:

Typ-1-Aufgabe

Quadrat

A, B, C und D sind Eckpunkte des unten abgebildeten Quadrates, M ist der Schnittpunkt der Diagonalen.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$C = A + 2 \cdot \overrightarrow{AM}$	☐
$B = C + \overrightarrow{AD}$	☐
$M = D - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB}$	☐
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$	☐
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$	☐

Lösungsschlüssel

$C = A + 2 \cdot \overrightarrow{AM}$	☒
$B = C + \overrightarrow{AD}$	
$M = D - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB}$	
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$	☒
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$	

Lösungserwartung

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn genau die zwei richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Die nachstehende Aufgabe *Quadrat* zielt auf eine Grundkompetenz aus dem Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie* (vgl. BIFIE, 2013a):

Bezug zu Grundkompetenzen des SRP-Konzepts	
AG 3.3	Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können

Didaktischer Kommentar

Zur Lösung dieser Aufgabe müssen die Schüler/innen zwei charakteristische Eigenschaften eines Quadrats (Diagonalen halbieren einander und stehen normal aufeinander; Wissen aus der Sekundarstufe I) und die geometrische Deutung von Rechenoperationen mit Vektoren in Zusammenhang bringen. Damit kann in der Folge jede der fünf Aussagen auf ihre Richtigkeit überprüft werden.

Auch bei dieser Aufgabenstellung wird deutlich, dass das verständige Anwenden von (Grund-)Wissen und nicht das verständnislose Auswendiglernen zum Ziel führen. Zudem bildet diese Aufgabe sehr gut das breite Spektrum der dieser Grundkompetenz zugrunde liegenden Teilaspekte ab – es kommen alle in der Grundkompetenz angeführten Rechenoperationen bei der Auswahl der beiden zutreffenden Aussagen zum Einsatz.

Wie im Gegensatz zu den bisher besprochenen, eher kompakten Typ-1-Aufgaben die sogenannten Typ-2-Aufgaben aussehen können, zeigen die nachstehenden Aufgaben.

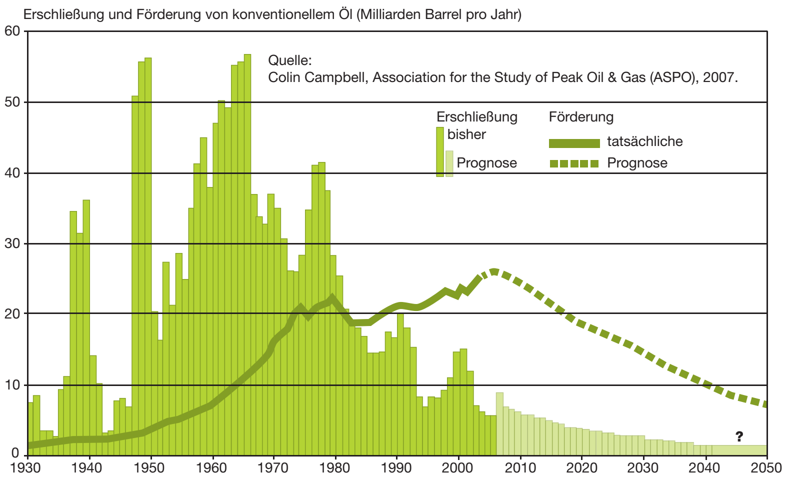
Aufgabe 3:

Typ-2-Aufgabe

Erdöl

Erdöl ist einer unserer wichtigsten Energieträger. Die Schätzungen, wie viel Erdöl wir in den nächsten Jahren noch fördern können, variieren sehr stark. Optimistische Schätzungen gehen von einer verfügbaren Restfördermenge von 1 250 Gigabarrel (der Faktor für 1 Giga ist 10^9) Rohöl ab dem Jahr 2010 aus.

Das Diagramm zeigt die Entwicklung der Erdölförderung in den letzten Jahren sowie die Entdeckung von Erdölvorkommen in Gigabarrel (Gbbl) pro Jahr.



Aufgabenstellungen:

a) Begründen Sie, warum ein lineares Wachstumsmodell im Zeitraum von 1930 bis 1970 zur Beschreibung der Erschließung bzw. Förderung von Erdöl nicht geeignet ist! Geben Sie ein passendes Wachstumsmodell an! Berechnen Sie mit diesem Modell, wie viel Erdöl im Jahr 1980 gefördert worden wäre, unter der Annahme, dass der Anstieg der Fördermenge sich genauso wie von 1930 bis 1970 weiter fortsetzt!

b) Nach einem kurzen Einbruch in den 1970er-Jahren stieg die Fördermenge von Öl zwar wieder an, aber nur mehr annähernd linear. Stellen Sie für den Zeitraum von 1988 bis 2006 ein lineares Wachstumsgesetz auf! Geben Sie an, um wie viel Gigabarrel in diesem Zeitraum die geförderte Ölmenge im Mittel gestiegen ist!

c) Bestimmen Sie, bis in welches Jahr die im Jahr 2010 geschätzte Restfördermenge von 1 250 Gigabarrel reicht, wenn die Fördermenge konstant auf dem Niveau des Jahres 2006 bliebe! Reflektieren Sie, ob die Annahme der konstanten Fördermenge der im Diagramm dargestellten Prognose entspricht! Begründen Sie Ihre Antwort!

d) Angenommen, die Fördermenge wäre ab 2006 jährlich um 1,5 % rückläufig: Berechnen Sie, wie viele Gigabarrel im Jahr 2050 gefördert werden würden! Beschreiben Sie, wie bei dieser Annahme die gesamte Fördermenge von 2006 bis 2050 ermittelt werden kann!

Lösungserwartung

Die Angabe von Einheiten ist notwendig. Stichwörter, die jedenfalls in den offenen Formaten enthalten sein müssen, sind <u>unterstrichen</u>.

a) Ein <u>lineares Wachstumsmodell</u> ist für den Zeitraum von 1930 bis 1970 <u>nicht geeignet</u>, weil ein solches Modell grafisch durch eine <u>Gerade dargestellt</u> wäre und dies <u>in der vorgegebenen Grafik</u> nicht der Fall ist. Aus der Grafik lässt sich jedoch deutlich ein exponentieller Verlauf für den Zeitraum von 1930 bis 1970 erkennen. Zudem wären die Abweichungen der einzelnen realen Fördermengen bei einem linearen Modell zu groß.

- *Für die Begründung (auch inhaltlich gleichwertige Formulierungen sind als richtig zu werten) ist ein Punkt zu vergeben.*

  Ein passendes Wachstumsmodell ist ein exponentielles.

  $N(t) = 1 \cdot (\sqrt[40]{16})^t$

  oder $N(t) = 1 \cdot 1{,}071773462^t$

  oder $N(t) = 1 \cdot e^{0{,}06931471755 \cdot t}$

  Fördermenge im Jahr 1980 nach diesem Modell: $N(50) \approx 32$ Gbbl

- *Für die Berechnung der Fördermenge im Jahr 1980 ist ein Punkt zu vergeben. Diese Fragestellung ist nicht als Komponente zu markieren, da ihre Beantwortung vom ersten Teil der Antwort abhängig ist.*

b) $N(t) = \frac{7}{8} \cdot t + 20$

- *Für das Aufstellen des linearen Wachstumsgesetzes ist ein Punkt zu vergeben. Diese Teilaufgabe könnte einer Komponente entsprechen, die auch noch dem „wesentlichen Bereich“ zuzuordnen ist.*

  Im Zeitraum 1988 bis 2006 ist die geförderte Ölmenge im Mittel um $\frac{7}{8}$ (bzw. 0,4) Gbbl gestiegen.

- *Für das Angeben und Deuten der mittleren Änderungsrate ist ein Punkt zu vergeben.*

c) Ein möglicher Rechenansatz ist: $1250 - 27 \cdot t = 0$ mit der Lösung $t \approx 46{,}30$.
Die Rohölvorräte würden bis zum Jahr 2056 reichen.

- *Für das Ermitteln des Werts, der angibt, wie lange die Rohölvorräte unter der gegebenen Annahme reichen würden, ist ein Punkt zu vergeben. Diese Teilaufgabe könnte einer Komponente entsprechen, die auch noch dem „wesentlichen Bereich" zuzuordnen ist.*

Nein, die Annahme einer konstant bleibenden Fördermenge entspricht nicht der Prognose, da diese als abnehmender Prozess dargestellt ist.

- *Für die Begründung (auch inhaltlich gleichwertige Formulierungen sind als richtig zu werten) ist ein Punkt zu vergeben.*

d) Zur Beantwortung der Frage muss zunächst ein neues Wachstumsmodell aufgestellt werden.

$N(t) = 27 \cdot 0{,}985^t$ oder $N(t) = 27 \cdot e^{-0{,}015113638 \cdot t}$

Im Jahr 2050 würden $N(44) \approx 13{,}89$ Gbbl gefördert werden.

- *Für das Ermitteln der Fördermenge im Jahr 2050 ist ein Punkt zu vergeben. Diese Teilaufgabe könnte einer Komponente entsprechen, die auch noch dem „wesentlichen Bereich" zuzuordnen ist.*

Die gesamte Fördermenge von 2006 bis 2050 kann mithilfe eines bestimmten Integrals bzw. als Grenzwert einer Summe von Produkten (Flächeninhalte der Rechtecke/Säulen, welche die Fördermenge pro Jahr beschreiben) berechnet werden.

- *Für die Deutung des Integrals (auch inhaltlich gleichwertige Formulierungen sind als richtig zu werten) ist ein Punkt zu vergeben.*

Die in dieser Aufgabe angesprochenen Grundkompetenzen lauten:

Bezug zu Grundkompetenzen des SRP-Konzepts	
AG 2.4	Lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können
FA 1.4	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
FA 2.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA 5.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
AN 1.3	Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können
AN 4.1	Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können

Didaktischer Kommentar

Auch hier liefert der einleitende Text bereits erste wichtige Informationen für die Lösung; die grafische Darstellung muss von den Schülerinnen und Schülern in ihrer Gesamtheit erfasst werden. Zur Lösung der einzelnen Teilaufgaben werden nicht nur operative Fertigkeiten und unterschiedliche Wissensbausteine benötigt, vielmehr noch sind Reflexionswissen und -vermögen gefragt. Die Aufgabe kann nur dann gelöst werden, wenn ganz unterschiedliche mathematikbezogene Tätigkeiten miteinander vernetzt werden. Dies wird für die Teilaufgabe a etwas näher ausgeführt.

Da heißt es eingangs: „Begründen Sie, warum ein lineares Wachstumsmodell für den Zeitraum von 1930 bis 1970 nicht geeignet ist!“ Dazu

- muss der entsprechende Zeitabschnitt in der Grafik identifiziert werden,
- müssen grafische Darstellungen linearer und anderer Wachstumsmodelle bekannt sein,
- muss die Fähigkeit, schriftlich argumentieren und begründen zu können, ausgebildet sein.

Um ein passendes Wachstumsmodell für den angesprochenen Zeitraum zu erstellen und, darauf aufbauend, die theoretische Fördermenge für 1980 zu prognostizieren,

- müssen die relevanten Werte aus der Grafik abgelesen werden,
- muss das exponentielle Wachstum als passendes Modell erkannt und dieses angegeben werden,
- muss ein konkreter Wert berechnet werden.

Für den Unterricht eröffnen derartige Aufgaben viele weitere bildungsrelevante Reflexionsanlässe.

Die folgende Aufgabe aus dem Bereich der Kosten- und Preis-Theorie enthält einen verhältnismäßig umfangreichen erklärenden Vorspann, da der gewählte Kontext den Schülerinnen und Schülern derzeit weniger vertraut ist. Bei der Reifeprüfung selbst würde dieser erklärende Text eher kürzer ausfallen, da davon ausgegangen wird, dass den Kandidatinnen und Kandidaten dieser Kontext (und alle im Kontextkatalog enthaltenen Kontexte) durch den vorangegangen Unterricht vertraut ist.

Aufgabe 4:

Typ-2-Aufgabe

Produktionskosten

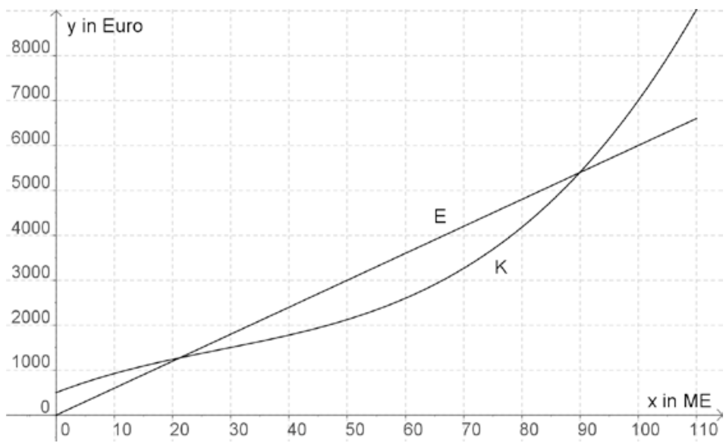
Die Produktionskosten eines Betriebes setzen sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen und können durch eine Kostenfunktion beschrieben werden. Fixkosten fallen auf jeden Fall an und sind unabhängig von der produzierten Menge. Variable Kosten hingegen nehmen mit steigender Produktionsmenge zu.

Die Kostenkehre ist jene Produktionsmenge, ab der die variablen Kosten immer stärker steigen, in diesem Fall spricht man von einem progressiven Kostenverlauf. Vor der Kostenkehre ist der Kostenverlauf degressiv, das heißt, die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.

Der Verkaufserlös ist das Produkt aus der verkauften Stückzahl und dem Verkaufspreis pro Stück.

Die untenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E des Betriebes, wobei x die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag ist. 1 ME entspricht einer Verpackungseinheit von 100 Stück. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.

Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Produktionskosten.



a) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich, das sind jene Stückzahlen (1 ME = 100 Stück), für die der Betrieb Gewinn erzielt!

Beschreiben Sie, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Verlauf des Graphen der Erlösfunktion E auswirkt und wie sich dadurch der Gewinnbereich verändert!

b) Bestimmen Sie anhand der Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME möglichst genau!

c) Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die in der Grafik abgebildeten Produktionskosten zu?

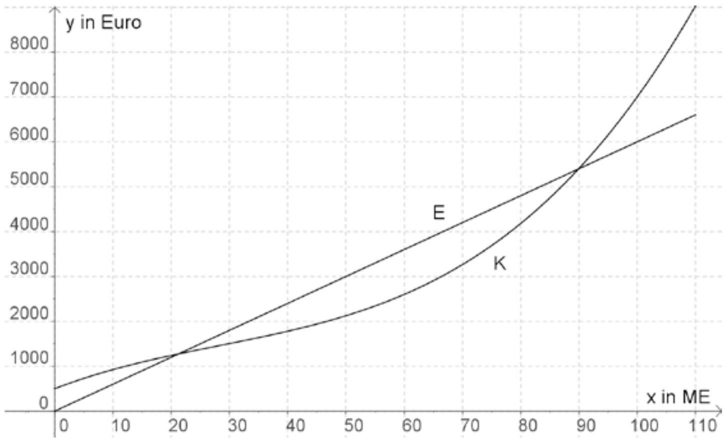
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Bei degressivem Kostenverlauf gilt: $K'(x) < 0$.	☐
Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	☐
Bei der Kostenkehre gilt: $K'(x) = 0$.	☐
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	☐
Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.	☐

Erklären Sie ausführlich, was die 1. und die 2. Ableitung der Kostenfunktion an einer bestimmten Stelle über den Verlauf des Graphen von K an dieser Stelle aussagen!

d) Deuten Sie die Beziehung $K'(x) = E'(x)$ geometrisch und ermitteln Sie anhand der nachstehenden Abbildung jene Produktionsmenge x_1, für die dies zutrifft!

Begründen Sie, warum der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am größten ist!



Lösungserwartung

Die Angabe von Einheiten ist notwendig. Stichwörter, die jedenfalls in den offenen Formaten enthalten sein müssen, sind unterstrichen.

a) Die Anwort ist als richtig zu werten, wenn beide Grenzen des Grenzbereichs richtig angegeben sind, z. B.: *Bei einer Produktion von 2 100 bis 9 000 Stück wird Gewinn erzielt* (Toleranz bei Gewinngrenzen: ± 100 Stück).

- *Für das Angeben des Gewinnbereichs ist ein Punkt zu vergeben. Diese Teilaufgabe könnte einer Komponente entsprechen, die auch noch dem „wesentlichen Bereich" zuzuordnen ist.*

Weiters muss eine richtige Interpretation angeführt sein, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Gewinnbereich auswirkt, z. B.: *Bei einer Senkung des Verkaufspreises verläuft der Graph von E flacher, wodurch der Gewinnbereich kleiner („schmäler") wird.*

Als richtig zu werten ist auch die Antwort, dass bei einer starken Senkung des Verkaufspreises bei allen Produktionsmengen Verlust erzielt wird.

- *Für die Beschreibung, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Verlauf des Graphen von E und den Gewinnbereich auswirken (auch inhaltlich gleichwertige Formulierungen sind als richtig zu werten), ist ein Punkt zu vergeben.*

b) Fixkosten: 500 Euro (Toleranz: ± 100 Euro)

Verkaufspreis pro ME: $\frac{3000}{50}$ = 60 Euro (Toleranz: ± 5 Euro)

Falls der Verkaufspreis durch ein „zu kleines“ Steigungsdreieck sehr ungenau abgelesen wird (z. B. 50 Euro), so ist das Ergebnis als falsch zu werten.

- *Für das Angeben der Fixkosten und des Verkaufspreises ist je ein Punkt zu vergeben. Jede dieser Teilaufgaben könnte einer Komponente entsprechen, die auch noch dem „wesentlichen Bereich“ zuzuordnen ist.*

c) Es müssen die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sein.

Bei degressivem Kostenverlauf gilt: $K'(x) < 0$.	
Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	☒
Bei der Kostenkehre gilt: $K'(x) = 0$.	
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	☒
Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.	

Zudem muss eine Erklärung angegeben sein, z. B.: *$K'(x)$ beschreibt die Steigung der Kostenfunktion (oder: Steigung der Tangente) an der Stelle x (bei Produktion von x ME). $K''(x)$ beschreibt die Änderung der Steigung, also das Krümmungsverhalten der Kostenfunktion an der Stelle x.*
Im degressiven Bereich ist der Graph von K rechtsgekrümmt und im progressiven Bereich ist der Graph von K linksgekrümmt.

Auch folgende bzw. alle anderen inhaltlich richtigen Formulierungen sind als richtig zu werten: *K' beschreibt das Monotonieverhalten von K, d. h., falls $K'(x) > 0$ ist, steigt K an der Stelle x. K'' beschreibt das Monotonieverhalten von K', d. h., falls $K''(x) > 0$ ist, steigt K' an der Stelle x (d. h., die Kostensteigerung nimmt zu).*

Anmerkung: Aus der Antwort muss jedenfalls ersichtlich sein, welche geometrische Bedeutung K' und K'' besitzen, der Begriff *Monotonieverhalten* alleine ist nicht ausreichend.

- *Für die Erklärung, was die 1. und 2. Ableitung der Kostenfunktion an einer bestimmten Stelle über den Verlauf des Graphen von K an dieser Stelle aussagen (auch inhaltlich gleichwertige Formulierungen sind als richtig zu werten), ist ein Punkt zu vergeben.*

d) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn die richtige geometrische Deutung angegeben ist und x_1 bestimmt ist (falls x_1 nur eingezeichnet ist, der Wert aber nicht angegeben ist, so ist dies auch als richtig zu werten), z. B.: *Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von K und der Graph von E an dieser Stelle die gleiche Steigung besitzen. Oder: Die Tangente t an den Graphen von K verläuft parallel zum Graphen von E. Dies ist bei ca. 63 ME der Fall (Toleranz: ± 3 ME).*

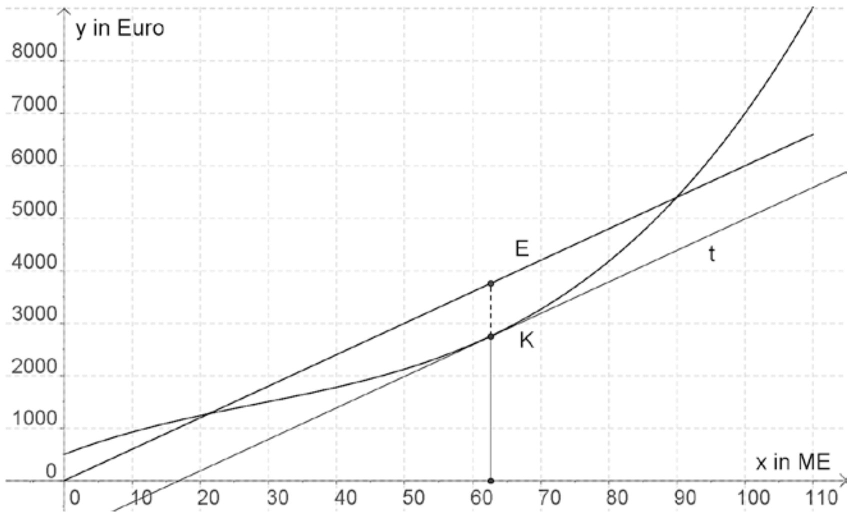
- *Für die geometrische Deutung der Beziehung $K'(x) = E'(x)$ (auch inhaltlich gleichwertige Formulierungen sind als richtig zu werten) ist ein Punkt zu vergeben.*

Zudem muss die Interpretation angegeben sein, dass an der gesuchten Stelle $G'(x) = 0$ gilt und somit $G(x_1)$ der maximale Gewinn ist, z. B.: *Wegen der Beziehung* $G(x) = E(x) - K(x)$ *gilt:* $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.

Somit gilt: $G'(x_1) = E'(x_1) - K'(x_1) = 0$ *und* $G(x_1)$ *ist daher der maximale Gewinn.*

Anmerkung: Der Nachweis des Maximums (Monotoniewechsel von G an der Stelle x_1) ist nicht erforderlich.

Auch die geometrische Begründung, dass der vertikale Abstand zwischen Erlös- und Kostenkurve an der Stelle x_1 am größten ist, ist als richtig zu werten, falls dieser Abstand (strichlierte Linie) richtig eingezeichnet ist.



Die in dieser Aufgabe angesprochenen Grundkompetenzen lauten:

Bezug zu Grundkompetenzen des SRP-Konzepts	
FA 1.6	Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können
FA 1.4	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
FA 2.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter *k* und *d* ermitteln und im Kontext deuten können
AN 2.1	Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$
AN 3.1	Den Begriff *Ableitungsfunktion/Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
AN 3.3	Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

Didaktischer Kommentar

Die Auseinandersetzung mit dem einleitenden Text fällt den Schülerinnen und Schülern bei dieser Aufgabe leichter, wenn der Kontext und die wichtigsten Begriffe der Kosten- und Preistheorie bekannt sind. Wesentlich für die Bearbeitung der Aufgabe ist die Information, dass 1 ME einer Verpackungseinheit von 100 Stück entspricht. Besonders wichtig für ein erfolgreiches Bearbeiten der Aufgabe *Produktionskosten* ist es aber, unterschiedliche Wissensbausteine aus den Inhaltsbereichen *Funktionale Abhängigkeiten* und *Analysis* auf den vorliegenden Kontext zu übertragen bzw. mit diesem zu vernetzen. Zur Lösung der ersten beiden Teilaufgaben wird vor allem das Ablesen aus grafischen Darstellungen und das entsprechenden Interpretieren im Zusammenhang mit der Produktion und dem Erlös nötig. Zur Lösung der letzten beiden Teilaufgaben sind grundlegende Kenntnisse der Differentialrechnung, insbesondere deren Anwendung im Kontext der Kosten- und Preistheorie erforderlich. Dies wird nun für die Teilaufgaben b und d etwas näher ausgeführt.

In der Teilaufgabe b heißt es: „Bestimmen Sie anhand der Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME möglichst genau!“ Dazu

- muss der Begriff *Fixkosten* mit der grafischen Darstellung der Kostenfunktion K in Einklang gebracht und abgelesen werden,
- müssen Werte der Erlösfunktion E aus dem Graphen abgelesen und damit der Preis pro Mengeneinheit (beispielsweise mittels Differenzenquotient) berechnet werden.

In der Teilaufgabe d ist einerseits die Beziehung $K'(x) = E'(x)$ geometrisch zu deuten und andererseits anhand der Abbildung jene Produktionsmenge x_1 zu ermitteln, für die diese Beziehung zutrifft. Dazu

- muss die innermathematische Bedeutung der 1. Ableitung bekannt sein,
- muss eine parallel zu E verlaufende Tangente an den Graphen der Funktion K eingezeichnet und die x-Koordinate des Berührpunktes abgelesen werden.

Außerdem ist zu begründen, warum bei x_1 der erzielte Gewinn am größten ist. Dazu

- muss das Wissen zur Ermittlung lokaler Extrema abgerufen werden,
- muss der Zusammenhang zwischen Gewinn-, Erlös- und Kostenfunktion bekannt sein und für die gefragte Begründung mitgedacht werden.

Resümee

Insgesamt zeigen die Ausführungen zu den dargestellten Typ-2-Aufgaben, dass Schüler/innen Erfahrung im Anwenden von Grundkompetenzen in verschiedenen Kontexten und dem Vernetzen von Grundkompetenzen benötigen, um sich bei der standardisierten Reifeprüfung auf zum Teil wenig oder unbekannte Kontexte einstellen zu können. Für die Typ-1-Aufgaben ist das verständige Anwenden von (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten in Kombination mit den jeweils passenden heuristischen Strategien (siehe Problemlösekompetenz) zielführend zur erfolgreichen Bearbeitung.

2 Kompetenzorientierte Unterrichtskultur

2.1 Die Entwicklung von Problemlösekompetenz im Mathematikunterricht

Eine Aufgabe lösen heißt ...
einen Ausweg aus einer Schwierigkeit finden,
einen Weg um ein Hindernis herum entdecken,
ein Ziel erreichen, das nicht unmittelbar erreichbar war.
George Pólya

„Das Kernstück der bildungstheoretischen Orientierung der zentralen SRP bildet eine in einem weiteren Sinne verstandene Lebensvorbereitung, die insbesondere als Befähigung zur Kommunikation mit Expert(inn)en und mit der Allgemeinheit gedeutet wird. Eine solche Kommunikationsfähigkeit wird als entscheidendes Orientierungsprinzip für die Auswahl von Inhalten und daran gebundener Kompetenzen gesehen.“ (IDM, 2009, S. 13)

Problemlösen als Kernkompetenz

Problemlösen ist eine Kernkompetenz für das persönliche, berufliche und gesellschaftliche Leben, zu deren Entwicklung auch der Mathematikunterricht einen wesentlichen Beitrag leisten kann und muss. Als Problemlösen wird die Fähigkeit bezeichnet, auch mit jenen Aufgaben erfolgreich umgehen zu können, deren Lösungsweg nicht unmittelbar ersichtlich ist. Mathematische Probleme sind dadurch charakterisiert, dass ihr Lösungsweg nicht offensichtlich ist: Es steht kein unmittelbar zum Ziel führendes Rezept – etwa in Form einer Formel oder eines Algorithmus – zur Verfügung.

Wenn der Unterricht stark auf Routineaufgaben bzw. -verfahren ausgerichtet ist und den Lernenden Wissen vorwiegend über das fragend-entwickelnde Verfahren und das mechanische Üben von ähnlichen Aufgaben vermittelt, so ist dieses Wissen weder nachhaltig verfügbar noch flexibel einsetzbar. Es kann somit in Transfersituationen kaum genützt werden. Um Problemlösefähigkeit zu entwickeln und tragfähiges Wissen zu erwerben, ist es notwendig, die Schüler/innen immer wieder auch mit ungewohnten Fragestellungen zu konfrontieren. Die regelmäßige Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen unterschiedlichen Anspruchsniveaus fördert problemlösendes, eigenständiges Denken. Die Lernenden sammeln Erfahrung beim Einsatz unterschiedlicher Lösungsstrategien und erwerben somit eine allgemeine mathematische Problemlösefähigkeit, die ihnen beim Lösen von „neuen“ mathematischen Problemen mit anderen Kontexten und ungewohnten Fragestellungen hilft.

Das Üben von Routineaufgaben ist im Lernprozess zwar unverzichtbar, aber es ist notwendig, Problemlösen, Entdecken und Üben miteinander zu verbinden. Dabei benötigen die Lernenden Raum und Zeit, um eigene Lernwege gehen zu können. Das Lösen mathematischer Probleme mit verschiedenen Schwierigkeitsgraden führt zu Erfolgserlebnissen bei Lernenden unterschiedlicher Begabung.

2.1.1 Problempotenzial von Aufgaben

Das Problempotenzial einer Aufgabe hängt stets von den Lernenden und vom vorangegangenen Unterricht ab. So kann sich eine scheinbar sehr anspruchsvolle Problemaufgabe für die Lernenden als Routineaufgabe entpuppen, weil sie im Unterricht zuvor wiederholt trainiert wurde. Die Charakterisierung einer Aufgabe, deren Einsatz man im Unterricht plant, kann und muss daher stets individuell von den Lehrenden getroffen werden. Wird zu wenig auf die spezielle Ausgangslage der Schüler/innen Rücksicht genommen, kann es leicht zu Über-, aber auch zu Unterforderung kommen.

Merkmale von Problemlöseaufgaben

Unterstützung bei der Charakterisierung von Aufgaben liefert ein Ansatz von Regina Bruder: Sie fasst die Merkmale, die eine Aufgabe als Problem qualifizieren, in vier Parametern (F, K, B und A) zusammen:

- F – der Formalisierungsgrad
- K – der Komplexitätsgrad
- B – der Bekanntheitsgrad
- A – der Ausführungsaufwand (vgl. Bruder, 1981)

Diese Parameter werden folgendermaßen beschrieben:

Der **Formalisierungsgrad F** beschreibt die Aufwändigkeit des Prozesses der Übersetzung in die mathematische Fachsprache und Symbolik. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage: Sind Kenntnisse aus anderen Unterrichtsfächern oder so genannte „Allgemeinbildung“ erforderlich bzw. hilfreich, um den Kontext zu erfassen?

Der **Komplexitätsgrad K** erfasst die kognitiven Anforderungen im Lösungsprozess. Hieran knüpfen sich folgende Fragen: Ist es notwendig, Verknüpfungen zwischen verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen herzustellen? Ist die Aufgabe mehrschrittig? Kann die Aufgabe auf bekannte Grundaufgaben zurückgeführt werden? Können bekannte Strategien eingesetzt werden?

Der **Bekanntheitsgrad B** ist stark abhängig von den Lernenden, aber auch vom vorangegangenen Unterricht. Zu hinterfragen ist: Wurden ähnliche Aufgaben schon gelöst? Wann wurden ähnliche Aufgaben gelöst? Stehen die zur Bearbeitung der Aufgabe notwendigen Kompetenzen aktuell zur Verfügung oder müssen sie erst „wieder geholt“ werden? Wie bekannt ist der Kontext bereits?

Der **Ausführungsaufwand A** im Hinblick auf den formalen Rechenaufwand ist je nach Aufgabe unterschiedlich und (auch) davon abhängig, welche Technologie zur Bearbeitung der Aufgabe zur Verfügung steht.

Diese vier Parameter sind auch bei der Auswahl von Unterrichtsaufgaben zur Vorbereitung auf die Typ-2-Aufgaben nach dem SRP-Konzept hilfreich.

Die Typ-2-Aufgaben der SRP zeigen diese Merkmale oft in unterschiedlicher Intensität. Sie weisen für viele Lernende durch die Einbettung in den Kontext und die Länge des einleitenden Texts ein hohes Problempotenzial auf. Der Informationsumfang kann groß sein und die für die Bearbeitung der Aufgabenstellung relevanten Informationen müssen aus dem einleitenden Text gefiltert werden.

Zur Bearbeitung vieler Typ-2-Aufgaben sind eine gute Allgemeinbildung und Kenntnisse aus verschiedenen Wissensgebieten hilfreich. Sie müssen zur Bearbeitung der Fragestellung angewendet und verknüpft werden.

2.1.2 Problemlösen lernen – Methoden und Techniken zum Lösen von Problemaufgaben

The best way to learn is to do – to ask, and to do.
The best way to teach is to make students ask, and do.
Don't preach facts – stimulate acts.
Paul Halmos

Um die Lernenden mit den entsprechenden Methoden und Techniken beim Bearbeiten von Problemaufgaben vertraut zu machen, kann man beim Verhalten im Alltag anknüpfen. Wenn wir mit einer ungewohnten oder schwierigen Situation konfrontiert werden, orientieren wir uns an ähnlichen, bereits bekannten Situationen. Wir versuchen zunächst Teilprobleme zu lösen, die uns weniger schwierig erscheinen, und durch Analogieschlüsse Unbekanntes auf Bekanntes zurückzuführen. Diese Handlungen werden häufig intuitiv gesetzt – vor allem, wenn wir es gewohnt sind, auf unvorhergesehene Situationen richtig reagieren zu müssen und dies auch trainiert haben.

Bei George Pólya, einem der Urväter des Problemlösens, wird der Vorgang des Problemlösens in vier Phasen aufgeteilt. Diese Phasen können gut in Richtung des mathematischen Problemlösens interpretiert werden (vgl. Abschnitt 1.3).

- Phase 1: Verstehen der Aufgabe
- Phase 2: Erstellen eines Plans zur Lösung der Aufgabe
- Phase 3: Ausführen des Plans
- Phase 4: Reflexion der Bearbeitung

Phasen des Problemlösens

Ausgehend von diesen Phasen entwickelt Pólya eine Anleitung für das Bearbeiten von Problemaufgaben – diese Anleitung ist im Prinzip ein Fragenkatalog, der den Lernenden mögliche Denkrichtungen aufzeigen soll.

Phase 1: Verstehen der Aufgabe

- Was ist gegeben?
- Was ist unbekannt?
- Von welcher Art sind die Zusammenhänge, die mathematisch beschrieben werden sollen?
- Habe ich eine ähnliche Aufgabe bereits bearbeitet?
- Ist mir der Kontext bereits bekannt? Was weiß ich bereits darüber? Woher bekomme ich Informationen?
- Wie kann ich die gegebene Situation strukturieren?
- Müssen bestimmte Bedingungen erfüllt werden und kann ich diese mathematisch formulieren?
- Hilft mir eine Zeichnung (Tabelle …), um das Problem besser zu verstehen?
- Welche Informationen benötige ich, um die Aufgabenstellung zu bearbeiten?

Phase 2: Erstellen eines Plans zur Lösung der Aufgabe

- Kann ich Anknüpfungspunkte (Bekanntheitsgrad) finden, die mir helfen, einen Plan zu erstellen, wie ich die Aufgabe lösen kann?
- Welche grundlegenden Fähigkeiten und Fertigkeiten sind erforderlich? Wie muss ich sie vernetzen?
- Welche Strategien oder Hilfsmittel kenne ich, die mir helfen können?
- Welches mathematische Modell wähle ich?

Phase 3: Ausführen des Plans

- Welche Darstellungsform wähle ich?
- Welche Werkzeuge sind für die Problemlösung geeignet?
- In welche Teilschritte kann ich die Aufgabe zerlegen?
- Mit welcher Genauigkeit soll ich rechnen?
- Welche Rechenschritte benötige ich, um die Aufgabe zu lösen?
- Wie kann ich die Rechenschritte, die mich zu meinem mathematischen Ergebnis geführt haben, kontrollieren?
- Wie finde ich aus dem mathematischen Ergebnis eine Lösung für die gestellte Aufgabe?

Phase 4: Reflexion der Bearbeitung

- Habe ich eine plausible passende Antwort für die gestellte Aufgabe gefunden?
- Welche Konsequenzen ergeben sich aus meiner Antwort im Hinblick auf den Kontext?
- Ist das von mir verwendete Modell nur beschränkt gültig?
- Was hat mir geholfen, die Aufgabe zu lösen?
- Wie bin ich vorgegangen – welche Strategien habe ich angewandt?
- Welche grundlegenden Kenntnisse und Fertigkeiten (insbesondere auch SRP-Kompetenzen) waren nötig, um die Aufgabe zu lösen?
- Welcher Ertrag für das Erlernen von Grundkompetenzen für die SRP ergibt sich aus der Bearbeitung der Aufgabe?
- Gibt es auch andere Wege zur Lösung der Aufgabe?
- Sind die bei der Bearbeitung der Aufgabe von mir angestellten Überlegungen und Lösungswege auch bei der Bearbeitung anderer Aufgaben hilfreich?

In jeder dieser Phasen kommt selbstständigem Fragestellen der Lernenden besondere Bedeutung zu – sowohl bei der Auseinandersetzung mit Kontexten als auch beim Erstellen und Ausführen des Lösungsplans. Für die Vorbereitung der erfolgreichen Bearbeitung von Prüfungsaufgaben sind die Reflexion und Dokumentation des eigenen Problemlösemodells in Phase 4 von besonderer Bedeutung.

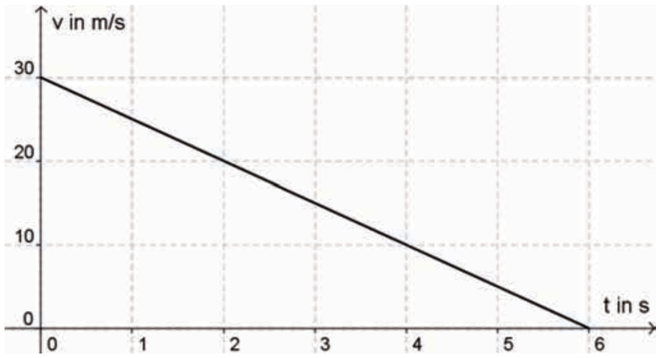
Durch regelmäßige Gespräche über Lösungen und das Beschreiben und Reflektieren des Lösungswegs bzw. der verschiedenen Lösungswege wird den Lernenden bewusst, welche heuristischen Methoden und Techniken sie bzw. die Mitschüler/innen genützt haben. Dadurch werden sie befähigt, diese Methoden und Techniken auch bei neuen Problemen nützen zu können. Sie lernen Problemlösestrategien zu differenzieren und auszuwählen. Dabei erkennen sie, dass mathematisches Problemlösen erlernbar und bewältigbar ist.

Die Schüler/innen sollten im Unterricht immer wieder aufgefordert werden, diese Phasen bei der Bearbeitung von Aufgaben bewusst zu durchlaufen. Um sie dabei zu unterstützen, kann es hilfreich sein, entsprechende Fragen bei einer Aufgabe zu ergänzen und die Antworten schriftlich festhalten zu lassen.

Bei der hier angeführten Typ-2-Aufgabe wurden exemplarisch einige Fragen ergänzt.

Bremsvorgang

Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von v = 30 m/s und bremst wegen eines auf der Fahrbahn liegenden Hindernisses ab. Zum Zeitpunkt t = 0 beginnt der Bremsvorgang. Die Abbildung zeigt modellhaft das t-v-Diagramm für einen Bremsvorgang.



- Was ist gegeben?
- Ist mir der Kontext bereits bekannt?
- Was kann ich aus der Grafik ablesen?

a) Bestimmen Sie $v'(t)$ und deuten Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit dem Bremsvorgang.

- Welche grundlegende Fähigkeiten und Fertigkeiten sind erforderlich? Wie muss ich sie vernetzen?
- Wie finde ich aus dem mathematischen Ergebnis eine Lösung für die gestellte Aufgabe?
- Welche Einheiten muss ich verwenden?

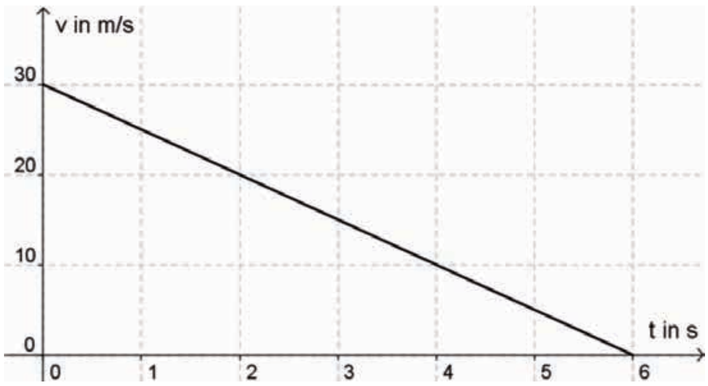
b) Ermitteln Sie die absolute und die relative Abnahme der Geschwindigkeit des PKW während der ersten beiden Sekunden des Bremsvorgangs.

- Von welcher Art sind die Zusammenhänge, die mathematisch beschrieben werden sollen?
- Welche Rechenschritte benötige ich, um die Aufgabe zu lösen?
- Mit welcher Genauigkeit soll ich rechnen?

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ für den Zeitraum des Bremsvorgangs. Begründen Sie, wie sich eine Änderung der Anfangsgeschwindigkeit auf den Verlauf des Graphen von $v(t)$ auswirkt, und interpretieren Sie deren Bedeutung für den Bremsvorgang.

- In welche Teilschritte kann ich die Aufgabe zerlegen?
- Müssen bestimmte Bedingungen erfüllt werden und kann ich diese mathematisch formulieren?
- Ist die Angabe eindeutig?
- Welche Konsequenzen ergeben sich aus meiner Antwort im Hinblick auf den Kontext?

d) Interpretieren Sie $\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t$ im vorgegebenen Kontext. Stellen Sie das Ergebnis dieses Ausdrucks in der folgenden Abbildung dar.



- Habe ich eine plausible passende Antwort für die gestellte Aufgabe gefunden?

Um die Aufgabe eindeutig lösbar zu machen, wurde der Hinweis auf die unveränderte Bremsverzögerung eingefügt. Ohne diese Ergänzung wäre diese offene Aufgabenstellung eine schöne Lernaufgabe, bei der Reflektieren aus der Sicht des Autofahrers eine wichtige Bedeutung hat.

Voraussetzung für den erfolgreichen Kompetenzerwerb ist aber in jedem Fall,

- dass den Schülerinnen und Schülern ausreichend Zeit für die Bearbeitung von Aufgaben und für die darauffolgende Reflexion gegeben wird und
- dass die Schüler/innen bereit sind, sich auf Probleme „einzulassen“ und Reflexionsfähigkeit für ihr Handeln zu entwickeln (vgl. BIFIE, 2011b, S. 33–41).

Dieser Kompetenzerwerb steht in Einklang mit der Definition von Franz E. Weinert (2001, S. 27–28). Weinert versteht unter Kompetenzen „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösung in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“.

2.2 Heuristik als Werkzeug im Mathematikunterricht

Erlernen von heuristischen Strategien

Problemlösen lernen lässt sich definieren als das Kennen- und Anwendenlernen von Methoden und Techniken zum Lösen von Problemaufgaben. Diese Methoden und Techniken werden auch Heurismen genannt.

Die Wissenschaftsdiziplin, die sich mit Problemlösemethoden beschäftigt, wird Heuristik (altgriechisch: εὑρίσκω heurisko, ich finde) genannt. Sie hat ihren Namen vom bekannten Ausspruch Archimedes (3. Jahrhundert v. Chr.) „Heureka – ich hab's!" erhalten und beschreibt die Fähigkeit, mit begrenztem Wissen und wenig Zeit zu guten Lösungen zu kommen.

Das Vermögen, verschiedene heuristische Vorgehensweisen anwenden zu können, hilft, eine knifflige Aufgabe, ein Problem im Alltag, ein Rätsel oder auch eine mathematische Fragestellung zu lösen. Das dabei erlebte Erfolgsgefühl hebt die Bereitschaft, sich auf weitere Probleme zuversichtlich einzulassen. Erfolgserlebnisse beim Problemlösen können die Lernmotivation und das Selbstwertgefühl erheblich stärken. Es zahlt sich also aus, unterschiedliche heuristische Vorgehensweisen näher zu betrachten.

Bei der Beobachtung, wie Schüler/innen mit Aufgaben umgehen, deren Lösungsweg nicht offensichtlich ist, stellt man häufig fest, dass gute Problemlöser/innen in der Regel heuristische Strategien und Hilfsmittel intuitiv anwenden und sich durch geistige Beweglichkeit auszeichnen.

Typische Erscheinungsformen geistiger Beweglichkeit sind:

Reduktion: Das gegebene Problem wird sinnvoll auf das Wesentliche reduziert. Es gelingt den Lernenden, aus der Aufgabenstellung jene Informationen herauszufiltern, die sie tatsächlich für die Bearbeitung der Aufgabe benötigen. Sie entwickeln aus der Fülle der Informationen ein Realmodell und erstellen ein Datenkonzentrat. Dabei nützen sie oft Visualisierungs- und Strukturierungshilfen.

Bevölkerungsprognose

In der angegebenen Tabelle der Statistik Austria ist die Bevölkerungsprognose für die österreichischen Bundesländer bis zum Jahr 2050 angegeben. Die Zahlenwerte geben die prozentuelle Veränderung der Bevölkerung jeweils in Bezug zu den Werten von 2010 wieder.

Bundesland	2015	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
Österreich	**2,1**	**4,0**	**5,7**	**7,2**	**8,5**	**9,7**	**10,8**	**11,6**
Burgenland	1,7	3,4	5,2	7,0	8,7	10,1	11,2	11,9
Kärnten	–0,1	–0,1	–0,1	–0,1	–0,3	–0,7	–1,3	–2,1
Niederösterreich	2,7	5,6	8,3	10,9	13,3	15,4	17,4	19,1
Oberösterreich	1,6	3,2	4,6	5,8	6,8	7,6	8,2	8,4
Salzburg	1,8	3,3	4,4	5,3	5,9	6,4	6,8	7,0
Steiermark	0,9	1,7	2,5	3,1	3,6	4,0	4,2	4,1
Tirol	2,3	4,3	5,8	7,3	8,4	9,5	10,4	11,0
Vorarlberg	2,7	5,0	6,8	8,5	9,9	11,1	12,2	13,0
Wien	3,2	6,1	8,4	10,5	12,4	14,4	16,4	18,2

Die im Jahr 2010 erhobenen Einwohnerzahlen sind nach Bundesländern dargestellt:

Burgen-land	Kärnten	Nieder-österreich	Oberös-terreich	Salzburg	Steier-mark	Tirol	Vorarl-berg	Wien
284 363	558 955	1 609 772	1 412 252	530 610	1 209 229	707 485	369 453	1 705 623

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

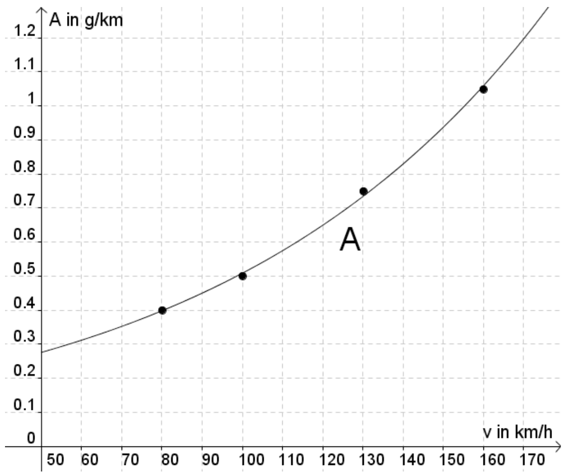
Das Burgenland wird weitgehend konstante Bevölkerungszahlen verzeichnen.	☐
In Kärnten wird die Bevölkerung mittelfristig relativ konstant bleiben und sie wird langfristig etwas niedriger sein, als sie derzeit (2010) ist.	☐
Überdurchschnittlich starkes Bevölkerungswachstum wird für Niederösterreich und Wien prognostiziert.	☐
Die Bevölkerungszahl wird in Tirol von etwa 707 000 (2010) bis 2030 um 7,3 % auf etwa 759 000 ansteigen und bis zum Jahr 2050 um 11 % auf etwa 885 000 Personen anwachsen.	☐
Tirol wird weiterhin Bevölkerungszuwächse verzeichnen, die in etwa dem bundesweiten Trend entsprechen.	☐

Kommentar

Insbesondere bei Multiple-Choice-Aufgaben fällt es Schülerinnen und Schülern manchmal schwer, die Distraktoren (in der Regel werden die falschen Antwortmöglichkeiten so bezeichnet) zu erkennen. Dies kann durch die Reduktion auf das Wesentliche erleichtert werden. Beispielsweise muss zum Erkennen des Distraktors *A* nur die Zeile „Burgenland" betrachtet werden. Der Rest der umfangreichen Tabelle kann ignoriert werden.

Reversibilität: Gedankengänge können manchmal sehr gut rückwärts nachvollzogen werden, wie man dies etwa bei der Suche nach einem verlegten Schlüssel macht. Man überlegt, wo und wann man ihn zuletzt gehabt hat.

Emissionen (Teil einer Typ-2-Aufgabe)



d) Zur Modellierung der in der Grafik dargestellten Abhängigkeit des NO_x-Ausstoßes *A* von der Fahrgeschwindigkeit *v* kommen unterschiedliche Funktionstypen in Frage.

Welche Funktionstypen können zur Modellierung der Funktion *A* verwendet worden sein?

Kreuzen Sie die beiden geeigneten Funktionsgleichungen an!

$A(v) = a \cdot v + b$ mit $a > 0, b > 0$	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$	☐
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b > 1$	☐
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$	☐

Kommentar

Um die Disktraktoren zu erkennen, können die Graphen der in den Antworten angebotenen Funktionen dargestellt und mit dem dargestellten Graphen verglichen werden (Technologie ist hilfreich).

Aspektbeachtung und Aspektwechsel: Verschiedene Aspekte eines Problems werden gleichzeitig beachtet, Abhängigkeiten werden leicht erkannt und gezielt variiert. Annahmen, Kriterien oder Betrachtungsaspekte werden gegebenenfalls gewechselt, um einer Lösung auf die Spur zu kommen.

Induktivität

Die Induktivität L einer Kupferspule hängt von der Querschnittsfläche A der Spule, von der Anzahl der Windungen n und von der Länge l der Spule ab. Sie kann mithilfe der Formel

$$L = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A \cdot n^2}{l}$$

beschrieben werden, wobei μ_0 und μ_r physikalische Konstanten sind.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den angegebenen Funktionen jeweils den passenden Funktionstyp f mit geeignetem $c \in \mathbb{R}$ zu.

$L(A)$ mit n und l konstant	
$L(n)$ mit A und l konstant	
$A(n)$ mit L und l konstant	
$n(l)$ mit L und A konstant	

A	$f(x) = c \cdot x^2$
B	$f(x) = c \cdot x$
C	$f(x) = c \cdot x^{-2}$
D	$f(x) = c \cdot x^{-1/2}$
E	$f(x) = c \cdot x^{-1}$
F	$f(x) = c \cdot x^{1/2}$

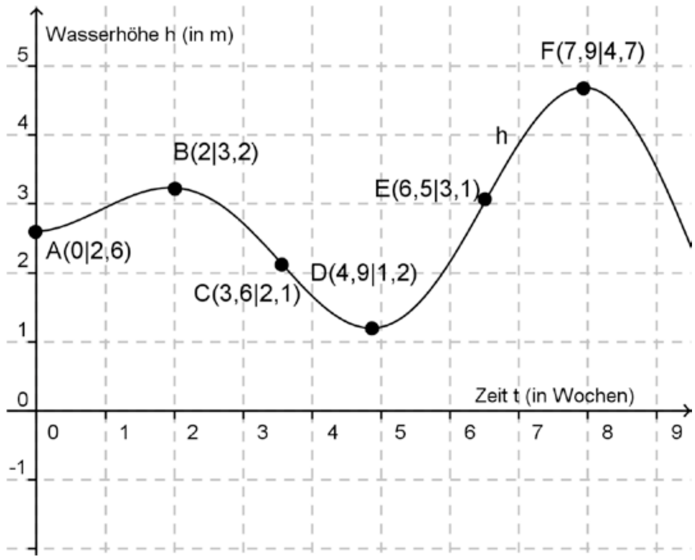
Kommentar

Berechnungen und Interpretationen bei Aufgaben mit Kontext verlangen häufig einen Aspektwechsel. So können Schüler/innen die Aufgabe in der Regel problemlos lösen, wenn sie die Aufmerksamkeit nicht auf den physikalischen Kontext richten, sondern ausschließlich die funktionalen Abhängigkeiten betrachten.

Transfer: Ein bekanntes Vorgehen kann leicht auf einen anderen, manchmal sogar sehr verschiedenen Kontext übertragen werden – das „Strickmuster" einer Aufgabe wird leichter erkannt.

Wasserstand eines Bergsees

Die Funktion *h* beschreibt die Wasserhöhe eines Bergsees in Abhängigkeit von der Zeit *t*. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *h*.



a) Bestimmen Sie den Wert des Differenzenquotienten des Wasserstands im Intervall [0; 2] und beschreiben Sie in Worten, was dieser Wert angibt! Um wie viel Prozent ist die Wasserhöhe während der ersten zwei Wochen gestiegen?

b) Was beschreibt die erste Ableitungsfunktion h' der Funktion *h*? Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Differenzialquotienten der Wasserhöhe zum Zeitpunkt $t = 6$ und beschreiben Sie in Worten, was dieser Wert angibt!

c) Was beschreibt die zweite Ableitungsfunktion h'' der Funktion *h*? Wann etwa nimmt die Wasserhöhe am stärksten zu?

Kommentar

Die 1. Ableitung $f'(x_0)$ beschreibt die momentane Änderungsrate der Funktion *f* an einer Stelle x_0. Den Schülerinnen und Schülern ist in der Regel bekannt, wie sie die 1. Ableitung bestimmen. Bei dieser und vielen anderen Aufgaben muss dieses Vorgehen auf verschiedene Kontexte übertragen werden (vgl. Abschnitt 2.4).

Diese geistige Beweglichkeit ist nicht bei allen Lernenden von vornherein gleich gut ausgeprägt. Ihnen müssen immer wieder Möglichkeiten geboten werden, ihre geistige Beweglichkeit an geeigneten Aufgaben zu trainieren und entsprechendes Strategiewissen zu erwerben, um es in der Folge anwenden zu können. Die dafür ausgewählten Aufgaben sollten verschiedene Sachverhalte vernetzen, gleichzeitig unterschiedliche mathematische Aspekte ansprechen und gegebenenfalls komplexere Modellierungen erfordern. Auch sollen sie Gelegenheit bieten, verschiedene Problemlösestrategien zu trainieren, und unterschiedliche Lösungswege ermöglichen (vgl. BIFIE, 2011b, S. 33–41).

2.2.1 Heuristische Strategien

heuristische Strategien und ihre Einsatzmöglichkeiten im Unterricht

Alle Schüler/innen sollen im Unterricht die Möglichkeit erhalten, für sie schwierigere Fragestellungen zu bearbeiten. Sie müssen die auftretenden Hindernisse und Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgabe selbst erleben. Nur so können sie den HEUREKA-Effekt im Fach Mathematik selbst erfahren.

Die Lernenden sollen einerseits das Problem der Aufgabe spüren, es andererseits aber als bewältigbar einschätzen. Besonders wichtig ist, möglichst allen Schülerinnen und Schülern einer Gruppe zu vermitteln, dass sie Problemlösen erlernen können. Dafür ist es notwendig, sie mit den entsprechenden Werkzeugen (Heurismen) vertraut zu machen und diese bei der Bearbeitung geeigneter Aufgaben bewusst zu verwenden. Durch bewusstes Training werden einzelne Heurismen automatisiert und können in neuen Problemlösesituationen eingesetzt werden.

Heuristische Strategien bieten eine Orientierungsfunktion auf dem Weg zum Finden von Lösungsideen und sind von der konkreten Aufgabenstellung weitestgehend unabhängig. Sie sind Konstruktionsanleitungen zum Problemlösen und keine Algorithmen, die abgearbeitet werden können. Es gibt weder eine klar definierte Reihenfolge in der Ausführung noch ein garantiertes und eindeutiges Ergebnis.

In der Folge werden einige für die Unterrichtspraxis relevante heuristische Strategien und Hilfsmittel genauer besprochen und ihre Einsatzmöglichkeiten bei der Bearbeitung geeigneter Musterbeispiele aufgezeigt:

- systematisches Probieren
- Rückwärtsarbeiten
- Rückführen von Unbekanntem auf Bekanntes
- Transformieren
- Aspektwechsel, Wechseln von Darstellungsformen, Suchen nach anderen mathematischen Beschreibungsmöglichkeiten
- Analogieschlüsse führen
- Generalisieren
- Spezialisieren
- Fälle unterscheiden

Die Schüler/innen sollten bereits ab der Volksschule mit einzelnen Strategien vertraut gemacht werden. Dadurch lernen sie, beim Bearbeiten einer neuen Aufgabe geeignete Lösungsstrategien auszuwählen.

Systematisches Probieren

Problemlösen beginnt mit Probieren in unterschiedlichen Formen, wobei systematisches Probieren nicht mit planlosem Probieren gleichzusetzen ist. Systematisches Probieren ist eine Strategie, die weiterhilft, wenn kein Algorithmus zur Verfügung steht, und kann auch eine mögliche Strategie beim Bearbeiten von Aufgaben sein. Elektronische Hilfsmittel unterstützen oft in der Phase des systematischen Probierens.

Anzahlbestimmung

Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, aus fünf Personen eine dreiköpfige Mannschaft für den Teamwettbewerb zu bilden!

Kommentar

ABC, ABD, ABE … Eines festhalten, anderes laufen lassen!

Winkelfunktionen

Gegeben ist das Intervall [0°; 360°]. Nennen Sie alle Winkel α im gegebenen Intervall, für die gilt: $\sin \alpha = \cos \alpha$!

Kommentar

Man kann zuerst exemplarisch für jeden Quadranten ausprobieren und jene Quadranten ausschließen, in denen die Vorzeichen der Winkelfunktionen unterschiedlich sind. Im Anschluss konzentriert man sich auf die verbleibenden Quadranten.

Gegenbeispiel finden

Um festzustellen, dass eine Aussage falsch ist, genügt es, ein einziges Gegenbeispiel zu finden, das ihr widerspricht. Diese Strategie hilft auch weiter, wenn es gilt, Distraktoren bei einer Multiple-Choice-Aufgabe zu erkennen.

Aussagen über Zahlen

Wahr oder falsch? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an.

Die Differenz $a - b$ zweier natürlicher Zahlen a und b ist immer eine natürliche Zahl.	☐
Das Produkt $a \cdot b$ zweier irrationaler Zahlen a und b ist immer irrational.	☐
Das Produkt $a \cdot b$ einer irrationalen Zahl a mit einer rationalen Zahl b kann rational sein.	☐
Die Summe $a + b$ aus einer rationalen Zahl a und einer irrationalen Zahl b ist immer irrational.	☐
Der Quotient $\frac{a}{b}$ zweier rationaler Zahlen a und b mit $b \neq 0$ kann eine natürliche Zahl sein.	☐

Kommentar

Ausprobieren ist erlaubt und erwünscht, um Distraktoren zu finden! Allerdings ist auch Wissen notwendig, um die wahren Aussagen zu identifizieren.

Bei Argumentationen und Beweisaufgaben hat systematisches Probieren zusätzlich die Bedeutung „etwas ausprobieren“ im besten/wörtlichen Sinn.

Betrag eines Vektors

Begründen Sie, warum für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ die Aussage $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ nicht immer richtig ist.

Formulieren Sie eine Bedingung, damit diese Gleichung gilt!

Kommentar

Probieren mit verschiedenen Vektoren (grafisch oder auch rechnerisch) hilft weiter.

Optimieren eines Rechtecks

Unter allen Rechtecken mit dem Flächeninhalt 4 dm^2 ist jenes mit dem kleinsten Umfang zu suchen.

Kommentar

Man versucht, durch Einsetzen von Zahlenwerten für die Länge und die Breite des Rechtecks das optimale Rechteck zu finden. Als Werkzeug eignet sich dafür eine Tabellenkalkulation – eventuell verbunden mit einer grafischen Darstellung.

Einsetzen von Zahlenwerten

Um die richtigen Antworten einer Multiple-Choice-Aufgabe zu identifizieren, benötigt man aber noch andere Strategien. Unsere Schüler/innen sollten erkennen lernen, dass die Kombination verschiedener Strategien hilfreich ist.

Vorwärtsarbeiten – Rückwärtsarbeiten

Vorwärtsarbeiten ist ein Probieren mit Richtung.
Regina Bruder

Die Strategie des Vorwärtsarbeitens ist aus dem Alltag gut vertraut, da sie sehr häufig angewandt wird. Ausgehend vom Gegebenen arbeitet man sich Schritt für Schritt zum Gesuchten vorwärts.

vom Gegebenen zum Gesuchten

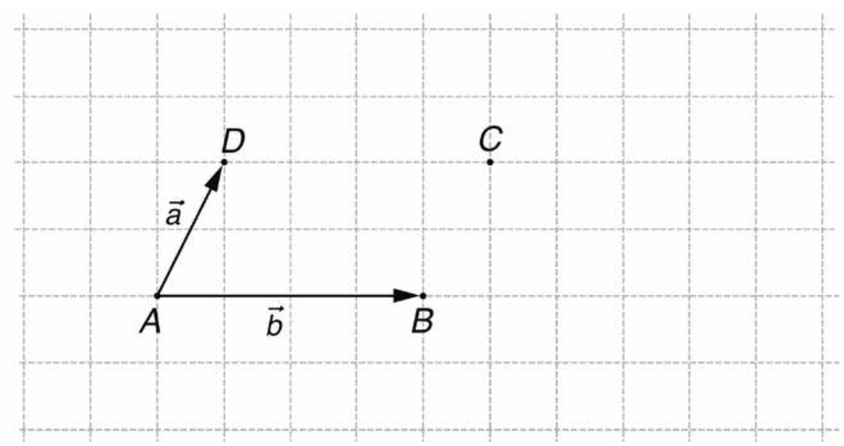
Vorwärtsarbeiten findet sehr häufig bei der Einführung neuer Lerninhalte statt. Man nützt vorhandenes Wissen, um neue Lernziele zu erarbeiten.

Orientierende Fragen und Impulse können sein:

- Was ist gegeben?
- Was weiß ich über das Gegebene?
- Was kann ich daraus ermitteln?
- Was kann ich aus dem, was ich schon weiß, folgern?
- Was ist gesucht?
- Was weiß ich über das Gesuchte?

Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die in der untenstehenden Abbildung als Pfeile dargestellt sind.



Stellen Sie $\frac{1}{2} \cdot \vec{b} - \vec{a}$ ausgehend vom Punkt C durch einen Pfeil dar!

Kommentar

Vorwärtsarbeiten – die Aufgabe muss Schritt für Schritt bearbeitet werden. Beispielsweise kann bei einem grafischen Lösungsweg in einem ersten Schritt von C ausgehend der Vektor $\frac{1}{2} \cdot \vec{b}$ als Pfeil dargestellt werden usw.

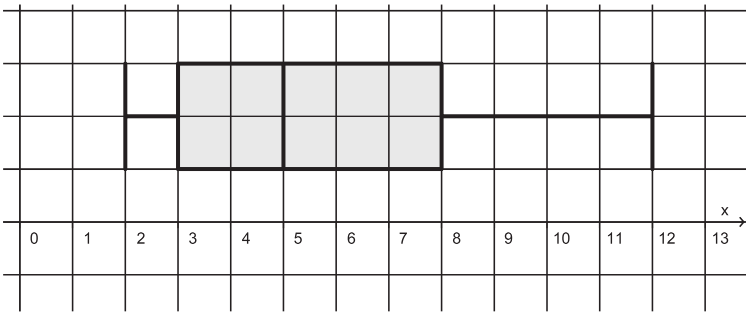
vom Gesuchten zum Gegebenen

Bei der Strategie des Rückwärtsarbeitens versucht man, vom Gesuchten zum Gegebenen zu kommen. Ausgehend vom Ergebnis wird eine Lösungsstrategie entwickelt, die zu den möglichen Ausgangsdaten führt.

Diese Strategie eignet sich auch zum Ausschließen von angegebenen Distraktoren bei Multiple-Choice-Aufgaben. Mit dem vorhandenen mathematischen Wissen werden die „falschen Ergebnisse“, die „Unmöglichkeiten“ sukzessive eliminiert.

Boxplot

Aus einer geordneten Liste von 10 Daten wurde der nachstehende Boxplot erstellt.



Welche der Listen liegt diesem Boxplot zugrunde? Kreuzen Sie die zutreffende Liste an!

2; 2; 2; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 12; 12	☐
2; 2; 3; 3; 4; 6; 6; 7; 8; 9; 12; 12	☐
2; 2; 2; 3; 4; 4; 6; 7; 9; 9; 12; 12	☐
2; 2; 2; 3; 4; 4; 6; 7; 8; 8; 12; 13	☐
1; 2; 2; 3; 4; 4; 6; 7; 8; 9; 12; 12	☐
2; 2; 3; 3; 3; 5; 5; 7; 8; 8; 12; 12	☐

Kommentar

Rückwärtsarbeiten – aus dem Boxplot werden die Kenngrößen abgelesen und mit den Listen verglichen. Beispielsweise kann das Minimum aus dem Boxplot abgelesen werden; durch Vergleich kann die fünfte Liste ausgeschlossen werden.

Schnittpunkt zweier Geraden

Zeigen Sie, dass sich die beiden nicht parallelen Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $y = 2x - 1$ im Punkt $S = (2|3)$ schneiden!

Kommentar

Es ist einfacher zu überprüfen, ob der Punkt S auf beiden Geraden liegt, als die beiden Geraden zu schneiden. Rückwärtsarbeiten vereinfacht bzw. ist eine Möglichkeit der Probe.

Bei vielen Aufgaben mit geschlossenem Antwortformat kann es sinnvoll sein, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zu kombinieren.

Äquivalente Terme

Welche der angeführten Terme sind äquivalent zum Term $\frac{a-b}{c}$ (mit $c \neq 0$)? Kreuzen Sie den/die zutreffenden Term(e) an!

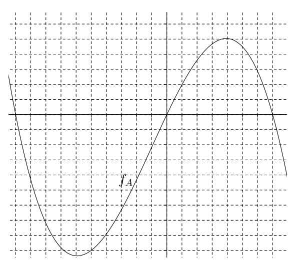
$\frac{a}{c} - \frac{b}{c}$	☐
$a - b : c$	☐
$\frac{ac - bc}{c^2}$	☐
$(a - b) \cdot c^{-1}$	☐
$\frac{a}{c} - b$	☐

Kommentar

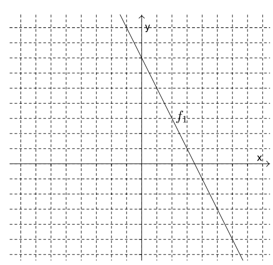
Bei dieser Aufgabe ist eine Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten sinnvoll. Man kann durch Vorwärtsarbeiten den Term umformen und mit den Antwortmöglichkeiten vergleichen oder von den Antworten ausgehend Distraktoren erkennen (Rückwärtsarbeiten).

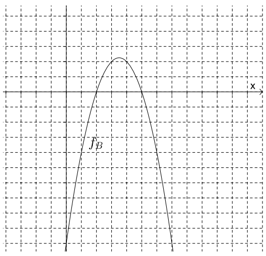
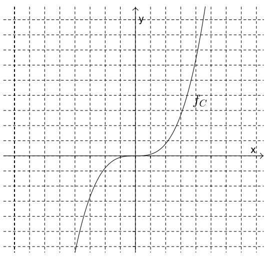
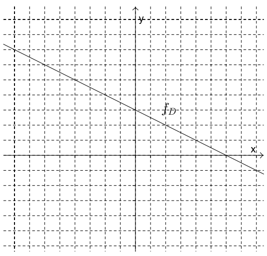
Ableitungsfunktion

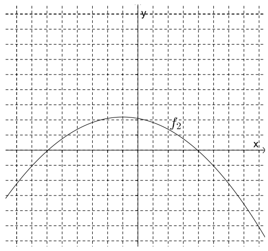
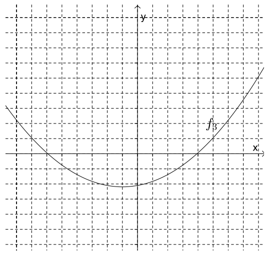
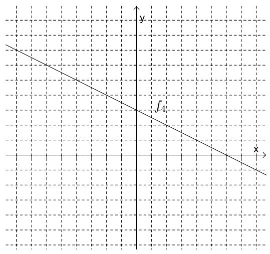
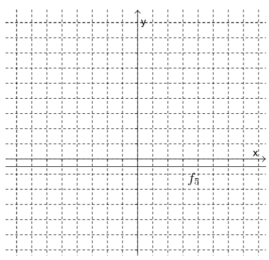
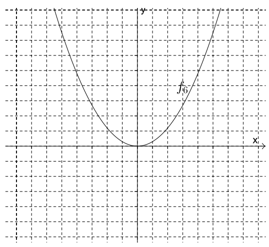
Ordnen Sie jedem Funktionsgraphen der Funktionen f_A, f_B, f_C, f_D den zugehörigen Funktionsgraphen ihrer Ableitungsfunktion f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 oder f_6 zu!



A



 x f_B	
 y x f_C	
 y x f_D	

B	 y x f_2
C	 y x f_3
D	 y x f_4
E	 y x f_5
F	 y x f_6

Kommentar

Am Funktionsgraphen sind bestimmte Eigenschaften ablesbar. Damit sucht man die Ableitungsfunktion (Vorwärtsarbeiten). Man kann aber ebenso von den Eigenschaften des Graphen der Ableitungsfunktion auf den Graphen der Funktion schließen (Rückwärtsarbeiten). Bei Technologieeinsatz können Aufgaben dieser Art auch gut mittels systematischen Probierens bearbeitet werden.

Abnahme- und Zunahmeprozesse

Mit Exponentialfunktionen können Abnahme- und Zunahmeprozesse beschrieben werden.

Ordnen Sie den angegebenen Funktionsgleichungen die jeweils beschriebenen Vorgänge zu!

Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle verdoppelt sich täglich.	
Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle verringert sich täglich um 15 %.	
Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle nimmt täglich um 85 % zu.	
Die Länge einer 1 Mikrometer kleinen Zelle nimmt täglich um 50 % ab.	

A	$G(t) = 1 \cdot 0{,}5^t$ (t in Tagen)
B	$G(t) = 1 \cdot 1{,}85^t$ (t in Tagen)
C	$G(t) = 1 \cdot 0{,}85^t$ (t in Tagen)
D	$G(t) = 1 \cdot 2^t$ (t in Tagen)
E	$G(t) = 1 \cdot 1{,}5^t$ (t in Tagen)
F	$G(t) = 1 \cdot 1{,}2^t$ (t in Tagen)

Kommentar

Kombination von Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten

Gerade bei Zuordnungsaufgaben ist eine Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten besonders zielführend. Gelingt es den Schülerinnen und Schülern, nur für einzelne beschriebene Zusammenhänge die richtige Funktionsgleichung anzugeben, so können die übrigen Zuordnungen durch Rückwärtsarbeiten gefunden werden. „Wo könnte die angegebene Funktionsgleichung passen?“

Lösungen von quadratischen Gleichungen

Welche der angegebenen Gleichungen haben die Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = -3$?
Kreuzen Sie die entsprechende(n) Gleichung(en) an!

$(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$	☐
$(x + 2) \cdot (x + 3) = 0$	☐
$x^2 + 10x + 12 = 0$	☐
$2x^2 + 10x + 12 = 0$	☐
$x^2 - 5x + 6 = 0$	☐

Kommentar

Diese Aufgabe ist ebenfalls ein typisches Beispiel, bei dem sich eine Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten bewährt. Beim Rückwärtsarbeiten setzt man die vorgegebenen Lösungen in die Gleichung ein und überprüft die Richtigkeit. Beim Vorwärtsarbeiten bestimmt man die Lösung jeder einzelnen Gleichung. Die Strategiewahl ist abhängig von der gegebenen Gleichung, dem Wissen der Schüler/innen und der zur Verfügung stehenden Technologie.

Rückführen von Unbekanntem auf Bekanntes

Orientierende Fragen und Impulse können sein:

- Habe ich bereits ähnliche Aufgabenstellungen bearbeitet?
- Kann ich durch Herausgreifen von Informationen die Aufgabe mit Bekanntem vergleichen?
- Kann ich die Aufgabe in Teile zerlegen, die ich schon bearbeiten kann?

Parameterbestimmung

Für welche Werte b und c aus $\mathbb{R}$ hat die Gleichung $c - x^2 = bx$ genau eine Lösung?

Kommentar

Rückführen auf die allgemein bekannte Schreibweise der Form $x^2 + bx + c = 0$

Mittlere Beschleunigung

Um den Bremsvorgang zu modellieren, wurde die Funktion $v(t) = -0{,}14(t - 50)^2 + 18$ verwendet.

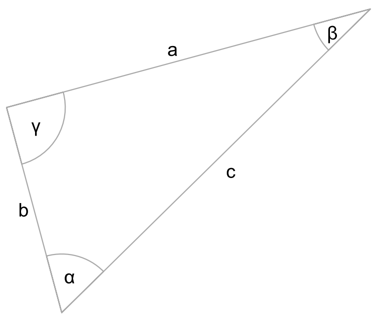
Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung des Zugs vom Anfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit!

Kommentar

Der bereits bekannte Begriff der mittleren Änderungsrate wird in einem neuen Kontext angewendet.

Rechtwinkeliges Dreieck

Zeigen Sie, dass in einem rechtwinkeligen Dreieck ($\gamma = 90°$) gilt: $\sin \alpha = \cos \beta$!



Kommentar

Die Gültigkeit der angegebenen Gleichung wird mit Hilfe der Definitionen für die Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck bewiesen.

Potenzen

Gegeben ist der Term $(a^4 \cdot b^{-5} \cdot c)^{-3}$.

Welche(r) der folgenden Terme ist/sind zum gegebenen Term äquivalent?
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Antwort(en) an!

$a \cdot b^{-8} \cdot c^{-2}$	☐
$\frac{b^{15}}{a^{12} \cdot c^3}$	☐
$\left(\frac{b^8 \cdot c^2}{a}\right)^{-1}$	☐
$\left(\frac{a^4 \cdot c}{b^5}\right)^{-3}$	☐
$a^{-12} \cdot b^{15} \cdot c^{-3}$	☐

Kommentar

Bei dieser Aufgabe sind verschiedene Strategien zielführend. Falls man mit negativen Exponenten nicht rechnen kann, kann man die Terme aber auch mit Hilfe positiver Exponenten darstellen (Rückführen auf Bekanntes).

Transformieren, Aspektwechsel, Analogieschluss

Orientierende Fragen und Impulse können sein:

- Welche ähnlichen Probleme habe ich bereits gelöst?
- Wie bin ich in ähnlichen Situationen vorgegangen?
- Was kommt mir an dieser Aufgabe bekannt vor?

Bei der Stofferarbeitung kann das Setzen von Wiedererkennungsmarken die Arbeit der Lernenden unterstützen. Auch kognitives Umstrukturieren kann ein komplexes Beispiel vereinfachen.

Wiedererkennen

Gravitationskraft

Das Gravitationsgesetz von Isaak Newton beschreibt die gegenseitige Anziehung zweier Massen.

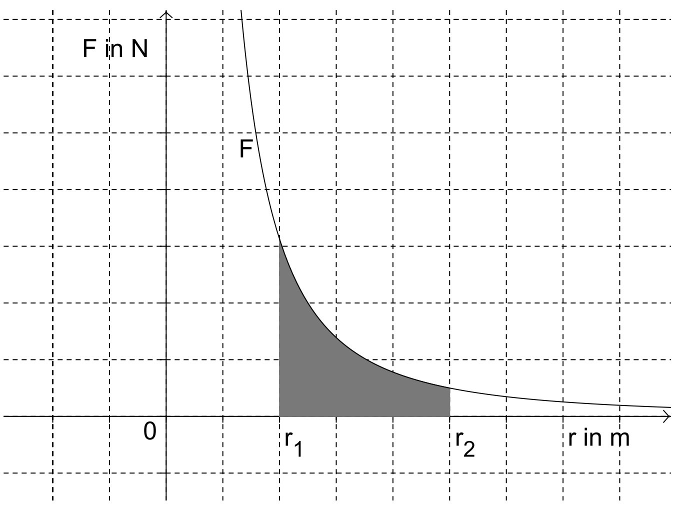
Aus einem Physikbuch: „Zwischen zwei Massenpunkten 1 und 2 mit den Massen m_1 und m_2 (m_1 und m_2 in kg) wirkt eine Gravitationskraft F entlang der Verbindungslinie der beiden Massenpunkte, die gerichtet ist."

Der Betrag dieser Kraft F wird durch die Gleichung

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

beschrieben, wobei r (r in m) der Abstand der beiden Massenpunkte ist. Die Gravitationskonstante G hat den Wert

$$G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}.$$



Analogien suchen

Kommentar

Wenn die Schüler/innen das bestimmte Integral als Grenzwert von Produktsummen verstanden haben, erkennen sie die Analogie. Der Wert des bestimmten Integrals entspricht der Größe der Arbeit W in Joule, die verrichtet werden muss, um die Masse m_1 aus der Entfernung r_1 in die Entfernung r_2 zu bringen.

Oder: Um den Massenpunkt m_2 aus einer Entfernung r_1 in eine Entfernung r_2 zu bringen, ist eine Arbeit von 15 Joule nötig.

Schneiden von Geraden

Zwei Schüler untersuchen die Lagebeziehungen von zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

Max rechnet im $\mathbb{R}^2$:

$$g_1\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$h_1\colon X = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + s_1 = -2 + 5t_1 \\ 3 + 4s_1 = -1 + 8t_1 \end{array} \right. \Rightarrow s_1 = 1$$

$\Rightarrow g_1 \cap h_1 = \{S_1\}$ mit $S_1 = (3|7)$

Sebastian rechnet analog im $\mathbb{R}^3$:

$$g_2\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$h_2\colon X = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + s_2 = -2 + 5t_2 \\ 3 + 4s_2 = -1 + 8t_2 \\ -1 + 5s_2 = 5 - t_2 \end{array} \right\} \Rightarrow s_2 = 1$$

$\Rightarrow g_2 \cap h_2 = \{S_2\}$ mit $S_2 = (3|7|4)$

Sind die Bearbeitungen korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Kommentar

Diese Aufgabe zeigt, dass Analogieschlüsse mitunter problematisch sind.

Die Struktur des Problems wird durch das Transformieren in eine andere Betrachtungsweise geändert.

Lösen einer Gleichung

Beschreiben Sie zwei verschiedene Möglichkeiten, die Gleichung $x^2 - 2x - 4 = -x + 2$ grafisch zu lösen.

Kommentar

Das Problem wird von der Gleichungslehre in die Funktionenlehre transformiert. Das Suchen bzw. Anwenden eines algebraischen Lösungsverfahrens wird ersetzt durch das Suchen des Schnittpunkts der Graphen von zwei Funktionen bzw. der Nullstellen einer Funktion.

Generalisieren – Spezialisieren

Orientierende Fragen und Impulse können sein:

- Wie komme ich von einem Spezialfall zu einem allgemeinen Fall?
- Welche Sonderfälle kann es geben?

Viereck

Gegeben ist ein Viereck *ABCD* mit $A = (-3|-1)$, $B = (1|-3)$, $C = (7|1)$, $D = (-1|6)$.

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Halbierungspunkte der Seiten dieses Vierecks ein Parallelogramm bilden!

b) Untersuchen Sie, ob die Behauptung von Aufgabe a für jedes beliebige Viereck *ABCD* korrekt ist!

Kommentar

Ausgehend von einem Sonderfall schließt man auf einen allgemeinen Fall. Das Generalisieren erfolgt durch das Rechnen mit Variablen.

vom Sonderfall auf das Allgemeine schließen ...

Geraden

Geben ist eine lineare Funktion f mit der Gleichung $f(x) = kx + d$.

Welche Aussagen können Sie über den Verlauf des Graphen der Funktion f in Abhängigkeit von der Wahl der Parameter k und d treffen?

Kommentar

Ausgehend von einem allgemeinen Fall schließt man auf die Sonderfälle – einen Parameter festhalten, den anderen variieren und umgekehrt!

... und umgekehrt

Fälle unterscheiden

Orientierende Fragen und Impulse können sein:

- Kann ich die Aufgabenstellung vereinfachen, indem ich unterschiedliche Fälle betrachte?
- Gibt es verschiedene Möglichkeiten? Wie komme ich zu den einzelnen Fällen?
- Wie kann ich die Grenzen legen, damit die Fallunterscheidung sinnvoll ist?
- Wovon hängt das Ergebnis ab?

Positives Produkt

Geben Sie jene Intervalle an, in denen der Wert des Produkts $(a - 1) \cdot (a + 3)$ positiv ist!

Kommentar

Eine Fallunterscheidung erleichtert das Auffinden der gesuchten Intervalle.

Lösungsanzahl

Die Anzahl der reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + b = 0$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist vom Wert der Parameter a und b abhängig.

Für welche Werte von a und b hat die Gleichung keine, eine oder zwei verschiedene reelle Lösungen? Stellen Sie die einzelnen Möglichkeiten übersichtlich dar!

Kommentar

Die Schüler/innen lösen die Gleichung nach x^2 bzw. x auf und treffen ihre Entscheidung mithilfe geeigneter Fallunterscheidungen. Beim Auflösen nach x sind Fallunterscheidungen wegen der Definition der Wurzel nötig.

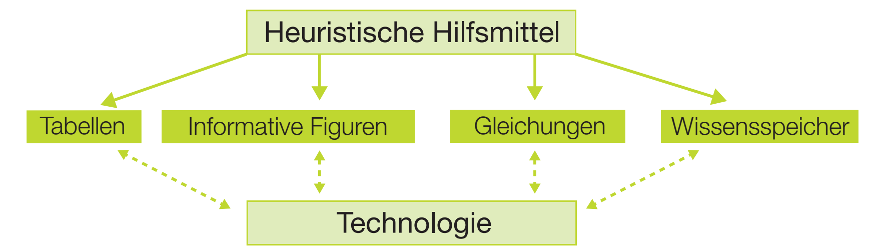
2.2.2 Heuristische Hilfsmittel

Was sind heuristische Hilfsmittel?

Heuristische Hilfsmittel werden insbesondere in der ersten Phase des Problemlösens beim Erfassen und Verstehen der Aufgabe eingesetzt. Einerseits helfen sie den Lernenden, eine Aufgabe so aufzubereiten, dass sie besser verstanden und somit leichter lösbar wird. Andererseits strukturieren sie, machen Beziehungen zwischen gegebenen Größen sichtbar, reduzieren Information und fokussieren so auf relevante Aspekte des Problems. Heuristische Hilfsmittel sind aber auch im Anschluss an die Bearbeitung einer Aufgabe durch einzelne Schüler/innen gut geeignet, um beschrittene Lösungswege auch für andere Schüler/innen nachvollziehbar zu beschreiben und Lösungsstrategien sichtbar zu machen.

Die Schlüsselfrage für die Auswahl eines geeigneten heuristischen Hilfsmittels lautet: Wie kann ich die Problemstellung veranschaulichen oder anders darstellen?

Die folgende Grafik gibt einen Überblick über die wesentlichen heuristischen Hilfsmittel, die im Mathematikunterricht für die Lernenden nützlich sind:



Tabellen

Tabellen sind eine Darstellungsform für Informationen, helfen beim systematischen Probieren bzw. liefern Hinweise, um in der Folge geeignete Gleichungen aufstellen zu können (vgl. Mischungsaufgaben, Bewegungsaufgaben).

Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Gustav kommt in der Nacht nach Hause und muss im Dunkeln die Haustüre aufsperren. An seinem ringförmigen Schlüsselbund hängen fünf gleiche Schlüsseltypen, von denen nur einer sperrt. Er beginnt die Schlüssel zufällig und nacheinander zu probieren.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl k der Schlüssel an, die er probiert, bis die Tür geöffnet ist.

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ dieser Zufallsvariablen X!

Kommentar

Eine Tabelle, in der jedem Wert k der Zufallsvariablen X die entsprechende Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ zugeordnet wird, erleichtert die Berechnung des Erwartungswerts.

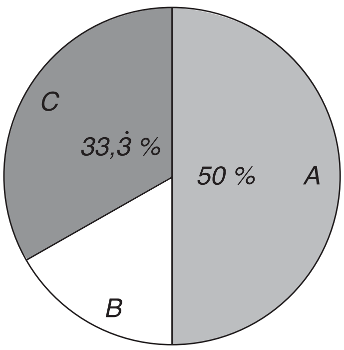
informative Figuren

Informative Figuren sollten so ausgeführt sein, dass aus ihnen möglichst viele Informationen abgelesen werden können und auch Zusammenhänge sichtbar werden, die nicht unmittelbar der Angabe entnommen werden können. Gleichzeitig sollten sie auf das Wesentliche reduzieren.

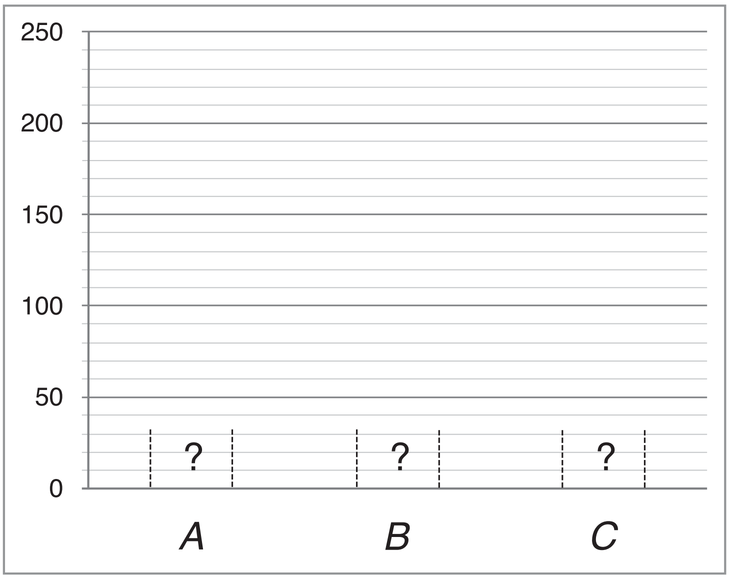
Zu den informativen Figuren gehören neben gut ausgeführten Skizzen auch Darstellungen im Koordinatensystem, grafische Darstellungen von funktionalen Zusammenhängen, Diagramme (statistische Darstellungen, aber auch Baumdiagramme).

Säulendiagramm

Bei einer Umfrage werden die 480 Schüler/innen einer Schule befragt, mit welchem Verkehrsmittel sie zur Schule kommen. Die Antwortmöglichkeiten waren „öffentliche Verkehrsmittel“ (A), „mit dem Auto / von den Eltern gebracht“ (B) sowie „mit dem Rad / zu Fuß“ (C). Folgendes Kreisdiagramm zeigt die Ergebnisse:



Vervollständigen Sie das folgende Säulendiagramm anhand der Werte aus dem obenstehenden Kreisdiagramm!



Kommentar

Diese Aufgabe erfordert einerseits die Interpretation einer Diagramms, andererseits aber auch die Erstellung eines Säulendiagramms.

Winkelfunktionen

Gegeben ist das Intervall [0°; 360°].

Nennen Sie alle Winkel α im gegebenen Intervall, für die gilt: $\sin \alpha = \cos \alpha$!

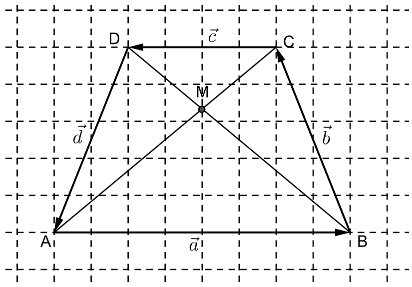
Kommentar

Eine Veranschaulichung der Winkelfunktionswerte als Koordinaten des entsprechenden Punkts auf dem Einheitskreis liefert fast automatisch die richtige Lösung.

Trapez

Die Abbildung zeigt ein gleichschenkeliges Trapez *ABCD* mit $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, $\overline{CD} = \vec{c}$ und $\overline{DA} = \vec{d}$. *M* ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen.

Kreuzen Sie die für jedes gleichschenkelige Trapez zutreffende(n) Aussage(n) an!



$\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert = \lvert\vec{c} + \vec{d}\rvert$	☐
$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{c} + \vec{d})$	☐
$\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert < \lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert$	☐
$-\vec{b} = \vec{d}$	☐
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$	☐

Kommentar

In dieser Aufgabe ist die informative Figur bereits gegeben und entsprechende Kennzeichnungen machen das Auffinden der richtigen Aussagen einfacher.

Wachsmalstifte

In einer Schachtel befinden sich ein roter, ein blauer und ein gelber Wachsmalstift. Ein Stift wird zufällig entnommen, die Farbe notiert und der Stift danach zurückgelegt. Dann wird das Experiment wiederholt. Beobachtet wird, wie oft bei zweimaligem Ziehen ein gelber Stift entnommen wurde. Die Werte der Zufallsvariablen X beschreiben die Anzahl der gezogenen gelben Stifte.

Kreuzen Sie die inhaltlich richtige(n) Aussage(n) an!

$P(X = 0) > P(X = 1)$	☐
$P(X = 2) = \frac{1}{9}$	☐
$P(X \leq 2) = \frac{8}{9}$	☐
$P(X > 0) = \frac{5}{9}$	☐
$P(X < 3) = 1$	☐

Kommentar

Zur Beantwortung dieser Aufgabe kann ein Baumdiagramm helfen.

Potenzfunktion

Gegeben ist eine Potenzfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2 + b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Wenn $b = 0$, dann verläuft der Graph von f durch den Ursprung des Koordinatensystems.	☐
Wenn $a < 0$ und $b > 0$, dann ist der Graph von f im Intervall $(-\infty; 0]$ monoton fallend und im Intervall $[0; \infty)$ monoton steigend.	☐
Wenn $f(0) < 0$, dann ist $b = 0$.	☐
Wenn $a < 0$ und $b > 0$, dann sind die Funktionswerte für alle Werte des Definitionsbereichs negativ.	☐
Wenn $f(0) > 0$, dann ist $b > 0$.	☐

Kommentar

Die zutreffenden Aussagen können mithilfe einer Skizze des entsprechenden Funktionsgraphen leichter gefunden werden.

die Sprache der Mathematik nutzen

Gleichungen sind eine Möglichkeit, Beziehungen zwischen Größen, die in der Alltagssprache formuliert sind, in der formalen Sprache der Mathematik darzustellen. Dadurch können Lösungen mit mathematischen Methoden gefunden werden.

Bei einer Vielzahl von Aufgaben auf der Website des BIFIE spielen Gleichungen als Darstellungsform eine wesentliche Rolle. Die Schüler/innen werden häufig aufgefordert, jene Gleichungen zu identifizieren, die die in der Aufgabenstellung beschriebene Situation richtig darstellen. Zwei (Teil-)Aufgaben aus der im Oktober 2012 veröffentlichten Probeklausur (BIFIE, 2012b) sollen dies veranschaulichen.

Grippeepidemie

Betrachtet man den Verlauf einer Grippewelle in einer Stadt mit 5 000 Einwohnern, so lässt sich die Anzahl an Erkrankten E in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit der Gleichung $E(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ beschreiben.

Folgende Informationen liegen vor:

1) Zu Beginn der Beobachtungen sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert.
2) Nach einem Tag sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt.
3) Am 3. Tag nimmt die Anzahl an Erkrankten am stärksten zu.
4) Am 8. Tag sind bereits 730 Personen erkrankt.
5) Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum.

Zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c und d werden folgende Gleichungen aufgestellt:

$d = 10$

$a + b + c + d = 100$

$18a + 2b = 0$

$300a + 20b + c = 0$

Geben Sie an, welche der angegebenen Informationen durch die 4. Gleichung ($300a + 20b + c = 0$) modelliert werden kann, und erklären Sie den Zusammenhang zwischen Information und Gleichung!

Angestellte Frauen und Männer

Für die Anzahl x der in einem Betrieb angestellten Frauen und die Anzahl y der im selben Betrieb angestellten Männer kann man folgende Aussagen machen:

- Die Anzahl der in diesem Betrieb angestellten Männer ist um 94 größer als jene der Frauen.
- Es sind dreimal so viele Männer wie Frauen im Betrieb angestellt.

Kreuzen Sie diejenigen beiden Gleichungen an, die die oben angeführten Aussagen über die Anzahl der Angestellten mathematisch korrekt wiedergeben!

$x - y = 94$	☐
$3x = 94$	☐
$3x = y$	☐
$3y = x$	☐
$y - x = 94$	☐

Kommentar

Um die richtigen Antwortmöglichkeiten zu finden, ist es im Unterricht unbedingt erforderlich, das Erstellen von passenden Gleichungen zu trainieren.

Wissensspeicher aufbauen und nutzen

Wissensspeicher finden sich nicht nur in Formelsammlungen. Auch das Internet ist für Aufgaben mit Kontext ein wesentlicher Wissensspeicher. Nicht zuletzt sind verfügbare heuristische Strategien und die Ergebnisse von Lernprozessen und gespeicherten Reflexionen Wissensspeicher. Auch andere heuristische Hilfsmittel wie Tabellen oder informative Figuren können nur dann eingesetzt werden, wenn bei den Lernenden das entsprechende Wissen verfügbar ist.

Wurzel aus 5

Gegeben ist die Zahl $-\sqrt{5}$.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Zahl $-\sqrt{5}$ liegt nicht in $\mathbb{R}$.	☐
Die Zahl $-\sqrt{5}$ liegt in $\mathbb{Z}$, aber nicht in $\mathbb{N}$.	☐
Die Zahl $-\sqrt{5}$ ist irrational.	☐
Die Zahl $-\sqrt{5}$ liegt in $\mathbb{Q}$ und in $\mathbb{R}$.	☐
Die Zahl $-\sqrt{5}$ kann nicht als periodische Dezimalzahl geschrieben werden.	☐

Kommentar

Aufgaben dieser Art sind ohne das Wissen der Eigenschaften der einzelnen Zahlenmengen nicht lösbar.

Auch die Kenntnis der Eigenschaften der verschiedenen Funktionstypen und des Verlaufs ihrer Graphen ist notwendig, um Aufgaben bearbeiten zu können. Hilfreich ist es, wenn die Schüler/innen in der Lage sind, den Kurvenverlauf durch eine „typische" Handbewegung zu beschreiben. Dies wird anhand der nachfolgend dargestellten Aufgaben sichtbar.

Lineare oder exponentielle Abnahme

Von einer reellen Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liegen einige Wertepaare vor.

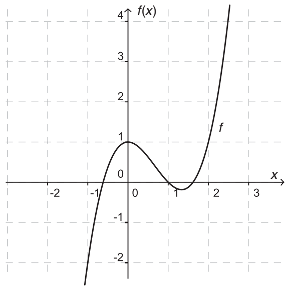
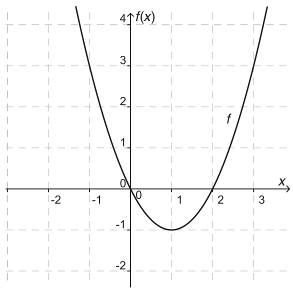
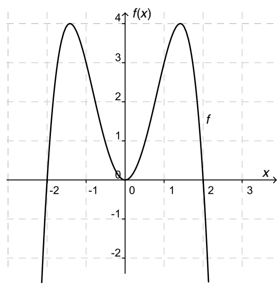
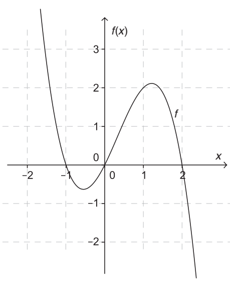
Untersuchen Sie, ob es sich bei f um eine lineare Funktion oder eine Exponentialfunktion handeln kann, und begründen Sie Ihre Entscheidung genau!

x	$f(x)$
0	4
2	1
4	0,25

Polynomfunktion

Es sind die Graphen von 4 Polynomfunktionen f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben.

Ordnen Sie den folgenden Graphen jeweils die entsprechende Funktionsgleichung zu!

A	$f(x) = x^2 - 2x$
B	$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$
C	$f(x) = x^2 + 2x - 1$
D	$f(x) = -x^4 + 4x^2$
E	$f(x) = x^4 - 4x^3$
F	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

höherwertige Technologie einsetzen

Steht den Schülerinnen und Schülern eine höherwertige Technologie zur Verfügung, dann erhöht sich die Bereitschaft, heuristische Hilfsmittel einzusetzen. Das Erstellen von Tabellen und informativen Figuren wird vereinfacht (vgl. Abschnitt 2.5).

Bedeutung der Parameter

Gegeben ist eine reelle quadratische Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a(x + b)^2 + c$ mit $a, b, c \neq 0$.

Welche Aussagen können Sie über den Verlauf des Graphen der Funktion f in Abhängigkeit von der Wahl der Parameter a, b und c treffen?

Kommentar

Die Variation der Parameter a, b und c durch den geschickten Einsatz von Schiebereglern erleichtert die Bearbeitung der Aufgabe.

Monotonie

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die Funktion f ist im Intervall [2; 3] ___①___, weil ___②___.

①	
streng monoton fallend	☐
konstant	☐
streng monoton steigend	☐

②	
für alle $x \in [2; 3]$ $f''(x) > 0$ gilt	☐
für alle $x \in [2; 3]$ $f'(x) > 0$ gilt	☐
es ein $x \in [2; 3]$ mit $f'(x) = 0$ gibt	☐

Kommentar

Das Einzeichnen der Graphen der Funktionen f, f' und f'' in ein Koordinatensystem macht das Finden der richtigen Satzbauteile einfach.

2.3 Verschiedene Interpretationen des Problemlösebegriffs

Die in den Praxishandbüchern Mathematik AHS Oberstufe Teil 1 und Teil 2 verwendeten Beschreibungen des mathematischen Problemlösens können als zwei Modelle des komplexen Problemlöseprozesses verstanden werden.

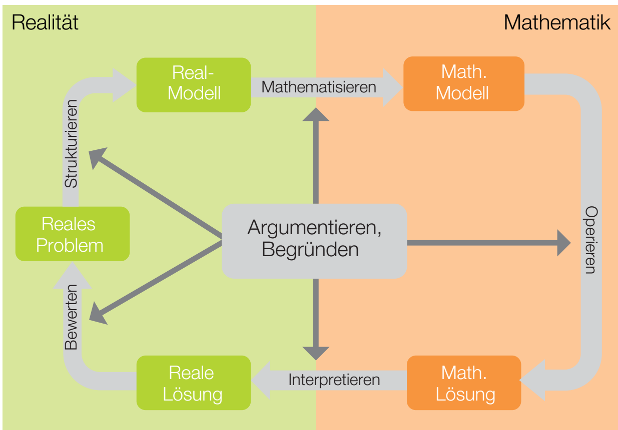
Modelle können stets nur Teilaspekte der Wirklichkeit beschreiben und dürfen nicht mit der Wirklichkeit gleichgesetzt werden. So wird beispielsweise in der Geographie die Landkarte nicht mit der Landschaft als identisch angesehen. Je nachdem, welche Aspekte dargestellt werden sollen, gibt es verschieden Modelle zur Beschreibung der Wirklichkeit (Straßenkarten, politische Karten usw.).

Der Problemlösebegriff im Praxishandbuch Teil 1 (BIFIE, 2011b, S. 83)

„Mathematik ist die über Jahrhunderte entwickelte Technik des Problemlösens durch Schließen" (Bruno Buchberger).

Problemlösen beschreibt die Abfolge kognitiver mathematischer Handlungen bei der Lösung eines Problems, unabhängig von individuellen Schwierigkeiten. Die typische Handlungsabfolge bei der mathematischen Lösung eines Problems kann wie folgt dargestellt werden (vgl. ebd.):

Mathematik ⇔ Problemlösen durch Schließen



Ausgangspunkt ist ein reales Problem, das mit Hilfe der Mathematik gelöst werden soll. Modellbilden erfolgt auf dem Weg vom realen Problem zum mathematischen Modell, bestehend aus den Phasen *Strukturieren* und *Mathematisieren*.

Danach wird durch Operieren eine mathematische Lösung gesucht, die aber in der Folge erst durch Interpretieren und Bewerten hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit für das vorliegende Problem untersucht werden muss. Argumentieren und Begründen begleiten den ganzen Kreislauf.

Diese Aktivitäten laufen nicht zwingend in der dargestellten Reihenfolge ab. Mathematisches Handeln erfordert in der Regel eine ständige Vernetzung der verschiedenen Handlungen. So wird etwa bei der Tätigkeit der Modellsuche auch schon ein Interpretieren notwendig sein und man wird argumentieren müssen, warum gerade ein bestimmtes Modell für diese Problemlösung besonders geeignet ist. Zur Analyse der Kompetenzen und für das Konzipieren von Unterricht ist es jedoch sinnvoll, wesentliche Aspekte der Kompetenzentwicklung in den einzelnen Bereichen anzusprechen.

Der Problemlösebegriff im Praxishandbuch Teil 2

Dieser Problemlösebegriff befasst sich mit den Handlungen des Individuums und berücksichtigt daher unter anderem auch die individuelle Schwierigkeit und den Bekanntheitsgrad von Aufgaben.

Beim Problemlösenlernen im Sinne dieses Problemlösebegriffs geht also es um heuristische Strategien, um Methoden und Techniken zum Lösen von Problemaufgaben.

- Eine Aufgabe lösen heißt einen Ausweg aus einer Schwierigkeit finden, einen Weg um ein Hindernis herum entdecken, ein Ziel erreichen, das nicht unmittelbar erreichbar war. (nach George Pólya)

- „Problem solving means engaging in a task for which the solution is not known in advance. Good problem solvers have a „mathematical disposition“ – they analyze situations carefully in mathematical terms and naturally come to pose problems based on situations they see. Students need to develop a range of strategies for solving problems, such as using diagrams, looking for patterns, or trying special values or cases. These strategies need instructional attention if students are to learn them. However, exposure to problem-solving strategies should be embedded across the curriculum. Students also need to learn to monitor and adjust the strategies they are using as they solve a problem.“ (NCTM, o. J.)

- „Problemlösenlernen heißt dementsprechend geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden, die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren.“ (Kultusministerkonferenz, 2003)

Schlussfolgerung

Es gibt zwischen diesen beiden Zugängen zum Problemlösebegriff kein „Wahr/Falsch“, kein ausschließendes „Entweder/Oder“, sondern nur ein „Sowohl/Als auch“. Die Lernenden brauchen nicht nur mathematische Kompetenz im Sinne der ersten Beschreibung, sie brauchen auch heuristische Strategien (Heuristik ⟷ Findungskunst) zur richtigen Modellentscheidung zur Bewältigung des Lösungswegs, zum geschickten Argumentieren und Begründen.

In diesem Sinne ergänzen einander die beiden beschriebenen Problemlösebegriffe sehr gut. Bruno Buchberger (2003) beschreibt die Verträglichkeit der beiden Sichtweisen, wenn er sagt, dass der wichtigste Ertrag des Fachs Mathematik die für mathematisches Handeln erforderliche Denktechnologie sei.

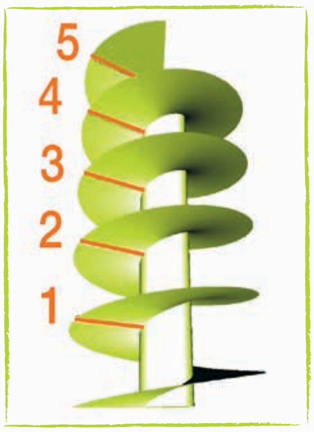
2.4 Lernlinien für langfristigen Kompetenzaufbau

Der Aufbau des mathematischen Gebäudes muss im Laufe eines nachhaltigen Lernprozesses schulstufenübergreifend bewusst erlebt werden. Dadurch entstehen Lernlinien, die für die Kompetenzentwicklung auf dem Weg zur Reifeprüfung von großer Bedeutung sind. Die dafür notwendige Vernetzung der durchlaufenen Entwicklungsstufen muss für die Schüler/innen erkennbar sein.

Spiralprinzip

Das bekannte Spiralprinzip (von J. Bruner) ist kennzeichnend für die Struktur solcher Lernlinien:

Dasselbe Thema wird zu verschiedenen Zeitpunkten, auch schulstufenübergreifend, auf unterschiedlichen Niveaus behandelt:

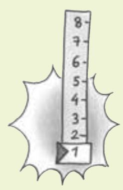


- Die einzelnen Durchläufe dürfen nicht isoliert voneinander bleiben. Die Schüler/innen müssen in früheren Stufen Gelerntes wieder erkennen, „wieder-holen".
- Die Standpunktverlagerung muss bewusst gemacht werden und es sollte auch transparent sein, wozu die neue Sichtweise dient, wie dadurch neue Probleme lösbar werden.
- Frühere Durchläufe dürfen spätere Erweiterungen nicht behindern. So sollte man etwa schon bei der Einführung des Inhaltsbegriffes in der 1. Klasse an das Integral denken.

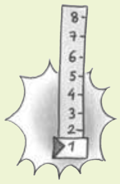
Eine Realität im derzeitigen Unterricht – auch bedingt durch die bisherige Prüfungskultur – ist das Lernen in kleinen, voneinander isolierten Portionen. Dadurch werden aber kaum innerfachliche und noch weniger fächerübergreifende Vernetzungen angeregt.

Nachhaltige Kompetenzentwicklung erfordert aber genau diese Vernetzung. Durch Lernlinien wird der Bezug zu bisher Gelerntem hergestellt und die Notwendigkeit der Weiterentwicklung mathematischer Begriffe und Algorithmen erkennbar gemacht. Das gilt in der Sekundarstufe II vor allem für das „Wieder-Holen" der für die Reifeprüfung wichtigen Grundkompetenzen.

Lernlinie „Vom Flächeninhalt zum Integral"



Die erste Stunde des Kapitels *Integralrechnung* findet eigentlich schon in der Volksschule statt, spätestens aber in der 5. Schulstufe, wenn man den Flächeninhalt des Rechtecks einführt.



2.4.1 Kompetenzentwicklung in der Sekundarstufe I

Schritt 1 (5. Schulstufe):
Entwickeln einer Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks

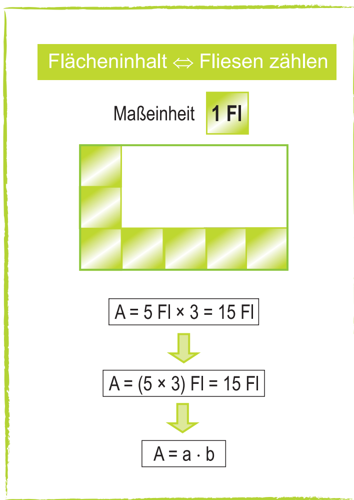
Es ist wichtig, dass die Lehrer/innen die Begriffe *Fläche* als Punktmenge und *Flächeninhalt* als reelle Zahl, die man dieser Punktmenge zuordnet, auseinanderhalten.

Zum Messen einer Größe G benötigt man eine Maßeinheit G_E und eine Messvorschrift. Das Ergebnis einer Messung ist dann eine Maßzahl G_Z. Messen bedeutet also, zu ermitteln, wie oft die Maßeinheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Es gilt also:

$$G_Z = \frac{G}{G_E} \Leftrightarrow G = G_Z \cdot G_E$$

Formeln entwickeln

Was bedeutet das für den Flächeninhalt? Um etwa den Flächeninhalt einer verfliesten Wand zu messen, definiert man als Einheit den Inhalt einer quadratischen Fliese (1 Fl) und untersucht, wie oft 1 Fl in der gesamten Fläche enthalten ist.



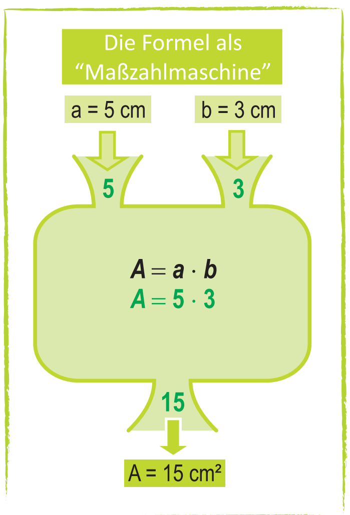
Strukturiert man den Zählvorgang, so kommt man zu einer Formel für den Flächeninhalt:

„Es sind fünf Fliesen in einer Reihe und drei Reihen haben wir – also sind 5 Fl · 3, das sind 15 Fl, enthalten."

Wählt man als Längeneinheit 1 cm und als Flächeneinheit 1 cm², so ergibt sich bei einem Rechteck mit a = 5 cm und b = 3 cm entsprechend diesem Zählvorgang die Schreibweise:

$A = 5\ \text{cm}^2 \cdot 3 = (5 \cdot 3)\ \text{cm}^2 = 15\ \text{cm}^2$

„cm²" ist vorläufig nur ein Name wie „Fl", der aber schon einen Bezug zur Längeneinheit hat.



Da die Einheit für die innermathematische Tätigkeit der Multiplikation bedeutungslos ist, besteht ein erster Abstraktionsschritt schon darin, die Flächeninhaltsformel als Formel für die Maßzahlen zu verstehen und die Festlegung der Einheiten davon getrennt zu sehen.

Die „Maßzahlmaschine" ist ein Modell für diese kognitive Tätigkeit und entspricht dann auch der Handlungsweise bei der Nutzung eines Taschenrechners. Nach der Entscheidung für die richtigen Einheiten werden nur die Maßzahlen in die „Maschine" eingegeben, dort verarbeitet und als Ergebnis erhält man die Maßzahl der gesuchten Größe, zu der dann die passende Einheit entschieden werden muss.

In einem zweiten Abstraktionsschritt, der aber erst auf der 7. Schulstufe möglich ist, sollte man an die obigen Überlegungen zu Maßen und ihrer Messung erinnern, nämlich an die Beziehung zwischen einer Größe G, ihrer Maßzahl G_Z und ihrer Maßeinheit G_E. Das heißt, jede Größe ist als Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit darstellbar. Für den Flächeninhalt eines Rechtecks mit l = 5 cm und b = 3 cm bedeutet das

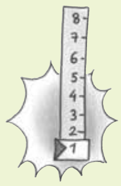
$$A = (5 \cdot 1\ \text{cm}) \cdot (3 \cdot 1\ \text{cm}) = (5 \cdot 3)\ \text{cm}^2$$

Für kontextbezogene Aufgaben bei der Reifeprüfung ist dieser Schritt eine wichtige Grundlage für das Entwickeln der Einheiten von Größen aus ihren Definitionsgleichungen (BIFIE, 2013a).

Beispiel: Die Definitionsgleichung für die Kraft lautet: Kraft = Masse mal Beschleunigung. Aus $F = m \cdot a$ ergibt sich als Einheit für die Kraft 1 Newton:

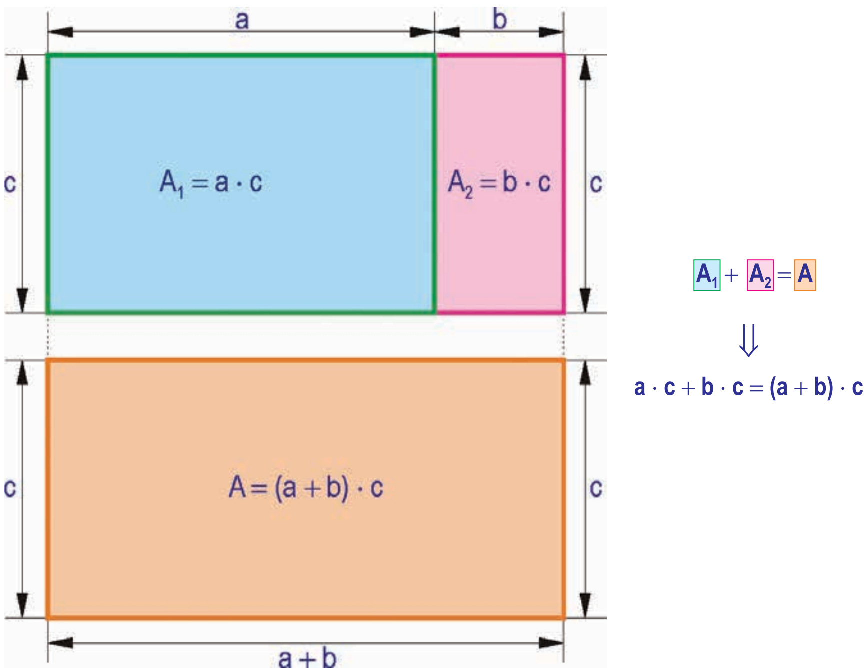
$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

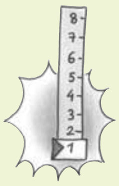
Schritt 2 (5. Schulstufe):
Rechengesetze „visualisieren“



Rechengesetze visualisieren

In diesem Schritt sollen Rechengesetze wie das Assoziativ-, das Kommutativ- und das Distributivgesetz mit Hilfe der Eigenschaften des Flächeninhalts plausibel gemacht werden.

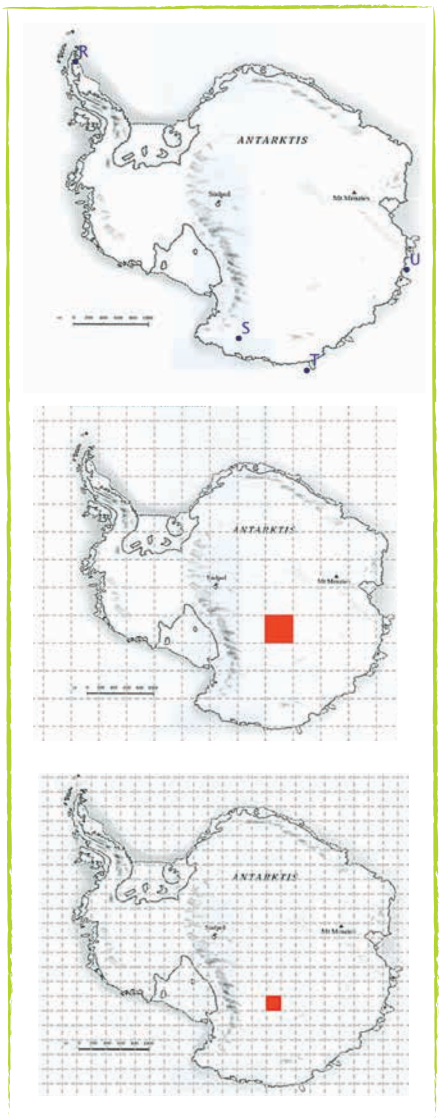




Schritt 3 (5. Schulstufe):
Ermittlung von Inhalten unregelmäßiger Flächen durch „Einheitenzählen“

Mit diesem Schritt beginnt eigentlich die Vorbereitung auf die Integralrechnung.

Aufgabe 1: Ermitteln des Flächeninhalts der Antarktis durch Zählen der Einheitsfläche
(vgl. OECD, 2006, S. 18–20)



Dafür ist eine neue Strategie erforderlich, weil ja bisher nur eine Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks bekannt ist.

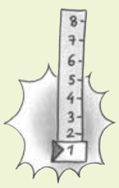
Erinnern an bereits Bekanntes

Eine Erinnerung an das „Fliesenzählen“ kann hilfreich sein. Man legt ein Gitter über die Antarktisfläche und überlegt mit Hilfe des Maßstabs, wie groß die „Einheitsfläche“ ist. Mit Hilfe des Maßstabs erkennt man: Im folgenden Bild ist die Einheitsfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge 400 km, also ist der Flächeninhalt der Einheitsfläche 160 000 km^2.

Dann wird gemessen, wie oft die Einheitsfläche in der zu messenden Größe enthalten ist. Lässt man eine ganze Klasse mit einem vorgegebenen Arbeitsblatt zählen, so ist ein interessantes Nebenprodukt die Berechnung des Mittelwertes aus allen Ergebnissen.

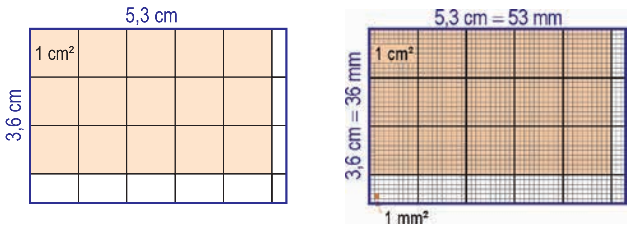
Eine gute Vorarbeit für die Idee des Integrals wäre eine Verfeinerung, das heißt, als Einheitsfläche ein Quadrat mit 40 000 km^2 vorzugeben.

Eine weitere Verfeinerung als Hausübung zu geben ist nicht empfehlenswert. Aber über die Idee zu reflektieren, dass eine weitere Verfeinerung das Ergebnis noch genauer machen würde, ist sicher sinnvoll.

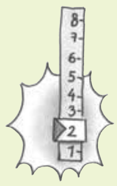


Schritt 4 (5. Schulstufe):
Loslösen von der ursprünglichen Idee des Zählens von Einheiten

Wenn man von der ursprünglichen Idee der Flächenmessung ausgeht, nämlich zu messen, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist, kommt man in Schwierigkeiten, wenn die Länge z. B. 5,3 cm und die Breite 3,6 cm ist. Das Problem lässt sich aber leicht beseitigen, wenn man zu einer kleineren Einheit übergeht, etwa zu mm^2.

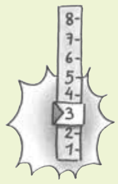


Diese Strategie funktioniert spätestens dann nicht mehr, wenn die Länge π cm und die Breite $\sqrt{2}$ cm ist. Was dann bleibt, ist das mathematische Modell für die Maßzahl des Flächeninhalts des Rechtecks, nämlich $A = a \cdot b$.

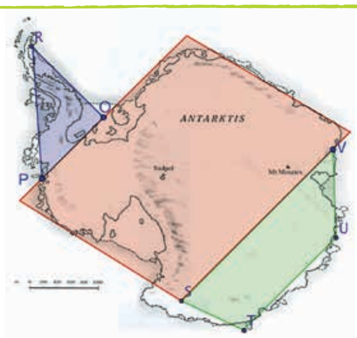


Schritt 5 (6. und 7. Schulstufe): Herleitung von Flächeninhaltsformeln durch Zurückführung auf die Rechtecksflächenformel und vorher bewiesene Formeln

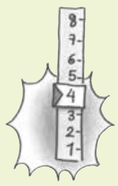
Diesen Schritt findet man in allen Schulbüchern und er wird daher hier nicht ausführlich behandelt. Die neuen Flächenformeln könnten aber dann verwendet werden, um etwa den Flächeninhalt der Antarktis anders zu ermitteln: Man versucht, die Fläche näherungsweise in Teilflächen zu zerlegen, für die eine Formel bekannt ist.



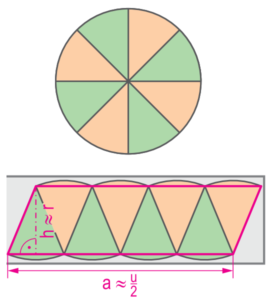
Aufgabe 2: Ermitteln des Flächeninhalts durch Zurückführen auf bekannte Teilflächen



Schritt 6 (8. Schulstufe): Flächenformeln durch Näherungsüberlegungen



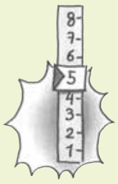
Ein wesentlicher Teilschritt ist die Erweiterung der Zahlenbereiche zu den reellen Zahlen und damit auch die Einführung der Zahl π. Nachdem man eine Formel für den Kreisumfang ermittelt hat, wäre der nächste Fortschritt auf diese Lernlinie die experimentelle Herleitung der Flächenformel des Kreises. Man teilt eine kreisförmige Torte in n Stücke (Kreissektoren) und verpackt sie, wie in der Zeichnung zu sehen, in eine rechteckige Schachtel. „Glättet“ man die Figur so erkennt man ein Parallelogramm mit der Länge $a = \frac{u}{2}$ und der Höhe $h = r$.



$$A = \frac{u}{2} \cdot r = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{2} \cdot r = r^2 \cdot \pi$$

2.4.2 Kompetenzentwicklung in der Sekundarstufe II

Die Lernlinie wird auf der 9. Schulstufe aufbauend auf den Vorerfahrungen der Sekundarstufe I fortgesetzt.

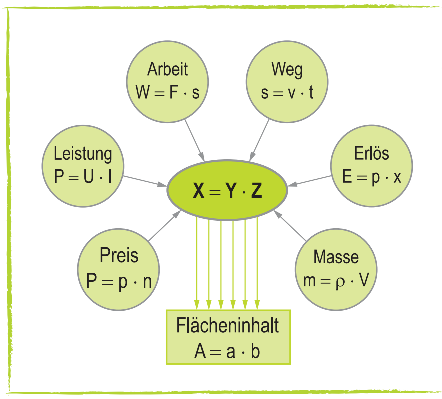


Schritt 1 (9. Schulstufe):
Modellcharakter von Formeln – „Verwandte der Rechtecksformeln“

Gerade dieser Schritt soll in der Sekundarstufe I vorbereitet werden.

Aufgabe 3: „Verwandte zur Flächenformel suchen“

Man schickt Schüler/innen auf eine Entdeckungsreise, auf die Suche nach Problemen, die dasselbe mathematische Modell wie der Inhalt der Rechtecksfläche haben. Das Ergebnis könnte etwa so aussehen:



Diese Verwandtschaft über das gemeinsame Modell ermöglicht das Lösen von Problemen in verschiedenen Kontexten durch Nutzen der Erkenntnisse über den Flächeninhalt.

Das bedeutet natürlich nicht, dass Größen aus anderen Kontexten jetzt in m^2 angegeben werden. Nachdem man für ein Problem ein Modell gebildet hat, übersiedelt man aus der Praxis in die Welt der Mathematik und sucht dort nach einer mathematischen Lösung.

Zur Interpretation der mathematischen Lösung in Bezug auf das praktische Problem sind folgende Überlegungen anzustellen:

- Entscheidung für geeignete Einheiten
- Reflexionen über die Sinnhaftigkeit mathematischer Lösungen für das praktische Problem
- Reflexionen über die Grenzen des Modells und seine Gültigkeit

Schritt 2 (9. oder 10. Schulstufe):
Produkte bei „verwandten physikalischen Formeln“

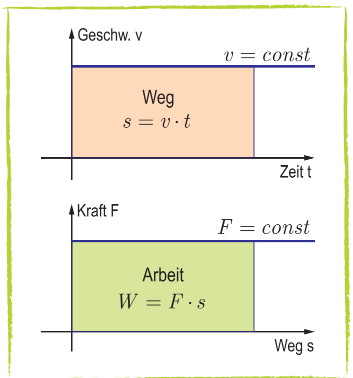
Ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts besteht darin, Mathematik als Sprache der Naturwissenschaften einzusetzen. Für die notwendigen kontextbezogenen Voraussetzungen nutzt man physikalische Grundkompetenzen aus der Unterstufe oder man vernetzt mit dem Physikunterricht, sobald das Fach Physik unterrichtet wird.

Aufgabe 4: Weg und Arbeit als „Verwandte“ des Flächeninhalts

„Weg = Geschwindigkeit × Zeit“ (Voraussetzung: Geschwindigkeit ist konstant): $s = v \cdot t$

„Arbeit = Kraft × Weg“ (Voraussetzung: Kraft in der Wegrichtung und Kraft konstant): $W = F \cdot s$

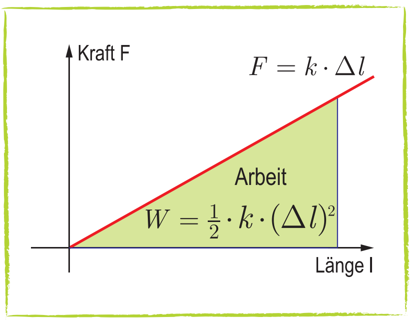
Zeichne die Graphen der konstanten Funktionen v in einem t-v-Diagramm und F in einem s-F-Diagramm. Wie kann man die Maßzahlen des Wegs und der Arbeit in diesen Diagrammen veranschaulichen?



Nutzt man das gemeinsame mathematische Modell wie beim Flächeninhalt, so entspricht die Maßzahl des Inhalts der Rechtecksflächen unter den Funktionsgraphen den Maßzahlen der gesuchten Größen Weg bzw. Arbeit. Interessanter wird die „Verwandtschaft", wenn, wie bei der nächsten Aufgabe, das kontextbezogene mathematische Modell keine konstante Funktion darstellt.

Aufgabe 5: Arbeit bei nicht konstanter Kraft – die „Kraftfunktion" ist linear

Man ermittle die Arbeit, die für das Ausdehnen einer Feder (z. B. „Expander" im Fitnesscenter) um die Länge Δl notwendig ist. Für das Ausdehnen einer elastischen Feder gilt das Hook'sche Gesetz, das besagt, dass die Kraft F (in einem gewissen Bereich) proportional zur Längenänderung ist. Übersetzt ins Mathematische heißt das: $F = k \cdot \Delta l$.



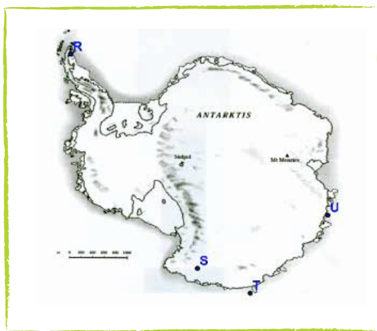
Zeichnet man den Graphen dieser homogenen linearen Funktion F in ein l-F-Diagramm ein, so ergibt sich aus dem Flächeninhalt unter dem Graphen die Maßzahl der verrichteten Arbeit.

Noch schwieriger wird das Problem, wenn die Abhängigkeit von zwei Größen nicht durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann. Gerade solche Probleme eignen sich aber zum Einstieg in die Integralrechnung.

Die Lehrplaninhalte der 10. Schulstufe, z. B. „Reelle Funktionen – Beschreiben von Änderungen durch Änderungsmaße (absolute und relative Änderung, Differenzenquotient)", bieten sich an, schon auf der 10. Schulstufe Näherungswerte von Flächeninhalten mittels Summen von Rechtecksflächen zu bilden. Der eigentliche Einstieg in die Analysis erfolgt aufbauend auf dem Grenzwert von Zahlenfolgen auf der 11. Schulstufe. Differenzen- und Differentialquotient bzw. mittlere und momentane Änderungsrate sind notwendige Grundlagen für den Schritt zum Integral in der 12. Schulstufe.

Schritt 3 (12. Schulstufe):
Von Produktsummen zum Grenzwert von Produktsummen (Integral)

Beginnen wir mit dem Flächeninhalt der Antarktis aus der 1. Klasse:



Zuerst soll daran erinnert werden, dass die Begriffe *Fläche* und *Flächeninhalt* zu unterscheiden sind: Die Fläche ist eine Punktmenge in einem Koordinatensystem – die Menge aller Punkte $(x|y)$, die innerhalb der Begrenzungslinie liegen. Der Flächeninhalt ist „ein Maß für die Größe der Fläche", also eine reelle Zahl.

Die Frage ist nur: Wie kommt man zu dieser reellen Zahl? In der 1. Klasse haben wir die Grundlagen bereits gelegt: Wir versuchen, den Inhalt einer so komplizierten Fläche wie der der Antarktis auf Inhalte von Flächen zurückzuführen, die wir berechnen können.

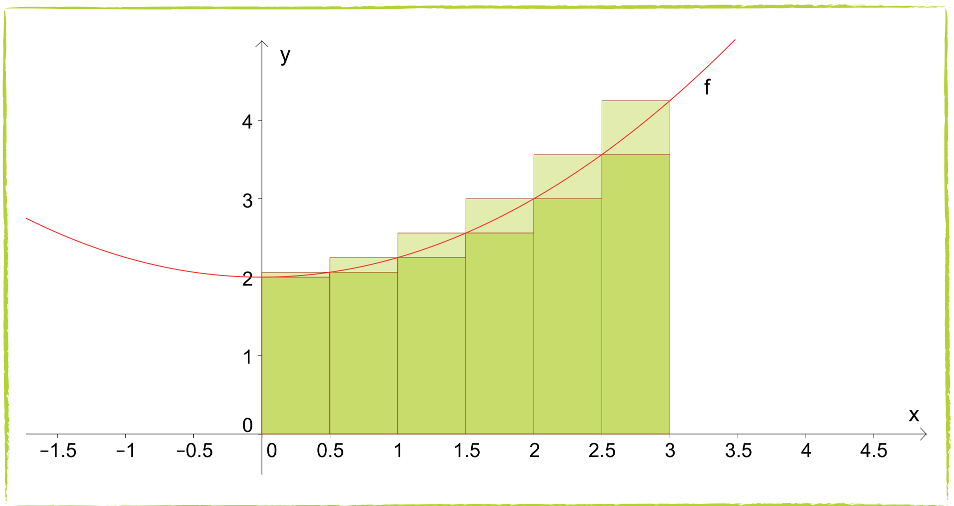
Schritt 3.1: Experimentelle Phase – Summen von Rechtecksflächen (Produktsummen) als Näherung für Flächen zwischen Kurven und der *x*-Achse

Die Rückbesinnung auf eine Näherung durch Rechtecksflächen führt zur Entwicklung und Berechnung von Unter- und Obersummen. Am Beginn dieser Lernphase steht das Skizzieren und Berechnen von Unter- und Obersummen. Man teilt ein Intervall in eine „erträgliche" Anzahl von Parallelstreifen, um Ergebnisse auch mit einem numerischen Taschenrechner ermitteln zu können.

Aufgabe 6: Unter- und Obersumme

Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = \frac{x^2}{4} + 2$

Teilen Sie das Intervall [0; 3] in sechs gleiche Teile! Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie die Unter- und die Obersumme!



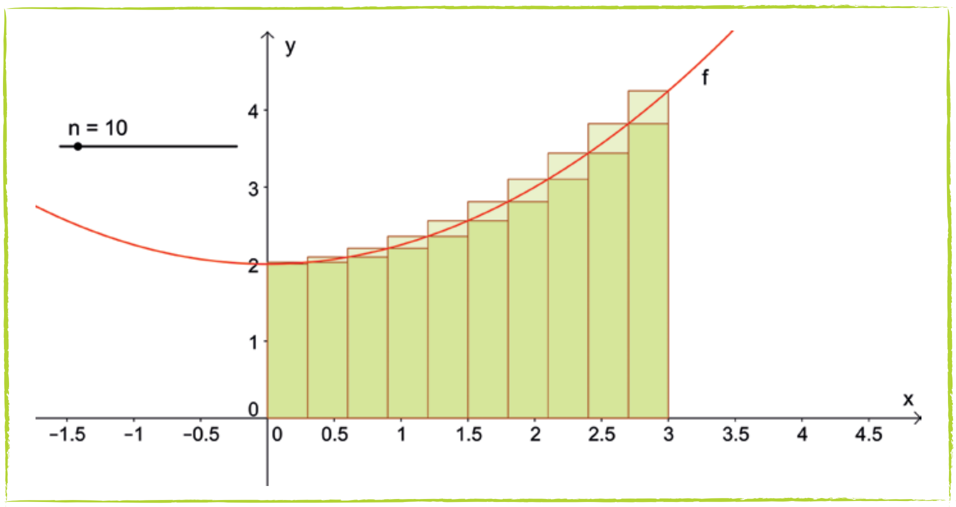
$u(6) = 0{,}5 \cdot f(0) + 0{,}5 \cdot f(0{,}5) + 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(1{,}5) + 0{,}5 \cdot f(2) + 0{,}5 \cdot f(2{,}5) = 13{,}4063$

$o(6) = 0{,}5 \cdot f(0{,}5) + 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(1{,}5) + 0{,}5 \cdot f(2) + 0{,}5 \cdot f(2{,}5) + 0{,}5 \cdot f(3) = 16{,}6563$

Wie die folgende Aufgabe zeigt, eignet sich Technologie für diese experimentelle Lernphase ganz besonders. Man kann mit einer wachsenden Anzahl von Rechtecksstreifen ein Gefühl für die Näherung an das Integral bekommen.

Aufgabe 7: Unter- und Obersumme mit Schiebereglern

Programme wie GeoGebra bieten die Funktionen „Untersumme[*f*,*a*,*b*,*n*]" und „Obersumme[*f*,*a*,*b*,*n*]" an. Man definiert zuerst eine Funktion „*f*", die untere Grenze *a* und die obere Grenze *b*. Für die Anzahl *n* der Rechtecksstreifen könnte man einen Schieberegler einbauen. Weiters ist es sinnvoll, eine Funktion „diff" als Differenz von Ober- und Untersumme zu definieren. Die Schüler/innen können dann experimentell erleben, dass bei wachsendem *n* die Differenz gegen 0 strebt.



In Technologieklassen könnte man die numerische Integration auch mit Zwischensummen oder mit der Trapezregel ausführen, weil das Operieren auf die Technologie ausgelagert werden kann.

Schritt 3.2: Beziehung zwischen Stammfunktion und Flächeninhalt

Problemstellung: Gegeben ist eine stetige Funktion f mit $y = f(x)$, von der wir vorerst voraussetzen, dass ihr Graph im Intervall $[a; b]$ nur oberhalb der x-Achse liegt.

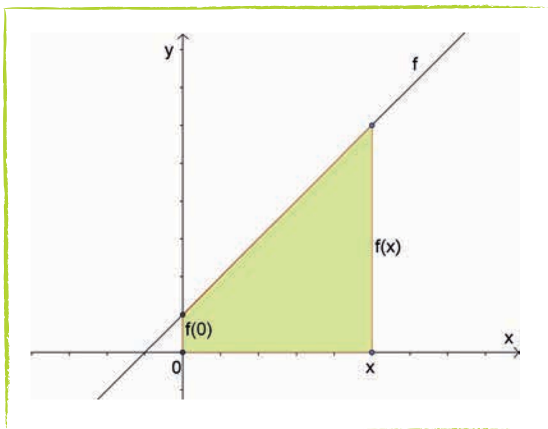
Gesucht ist der Flächeninhalt A, den der Graph der Funktion f mit der x-Achse im Intervall $[a; b]$ einschließt. Exakter: Gesucht ist der Flächeninhalt A der Ordinatenmenge $\{(x|y) | (a \leq x \leq b) \wedge (0 \leq y \leq f(x))\}$. Hält man die linke Grenze a fest und variiert die rechte Grenze x, so nennt man $A(x)$ die Flächeninhaltsfunktion. Das Schwierigste dabei ist, den Zusammenhang zwischen der Flächeninhaltsfunktion A der Funktion f und der Stammfunktion F von f zu verstehen.

Vorbereiten könnte man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung entweder, indem man die Flächeninhaltsfunktion unter linearen Funktionen ermittelt, oder experimentell, wie das folgende GeoGebra-Applet zeigt.

Aufgabe 8: Flächeninhaltsfunktion einer linearen Funktion

Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = x + 1$.

Ermitteln Sie die Flächeninhaltsfunktion $A(x)$ mit fester unterer Grenze $x = 0$ und variabler oberer Grenze x!



Es handelt sich um eine Trapezfläche mit den Parallelseiten $f(0)$ und $f(x)$ und der Höhe x.

$A(x) = \frac{f(0) + f(x)}{2} \cdot x$

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 + x + 1) \cdot x$

$A(x) = \frac{x^2}{2} + x$

Macht man die Probe mit Hilfe der 1. Ableitung, so findet man die Vermutung bestätigt, dass die Flächeninhaltsfunktion A eine Stammfunktion von f ist.

$A(x) = \frac{x^2}{2} + x$

$A'(x) = x + 1$

$\Rightarrow A'(x) = f(x)$

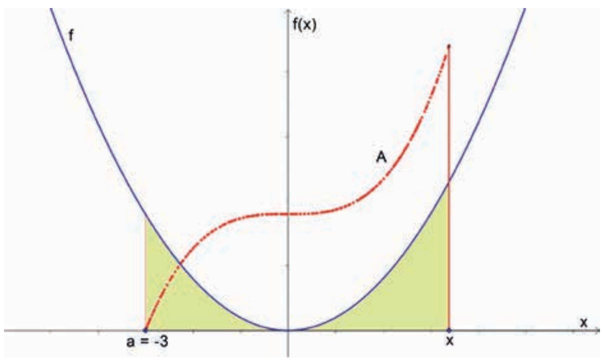
Aufgabe 9: Flächeninhaltsfunktion mit Hilfe von GeoGebra-Applets:

Man benutzt ein fertiges GeoGebra-Applet, wie man es auf der Website von GeoGebra (http://www.geogebratube.org) findet.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Ermitteln Sie mit dem GeoGebra-Applet die Spur der Flächeninhaltsfunktion A mit einer festen unteren Grenze von $a = -3$ und einer variablen oberen Grenze b.

Zieht man bei fester unterer Grenze a die variable Grenze b nach rechts, so sieht man nicht nur die gefragte Fläche, sondern auch die Spur der Flächeninhaltsfunktion A. Man erkennt, dass die Flächeninhaltsfunktion A eine Potenzfunktion 3. Grades vom Typ $F(x) = k \cdot x^3 + c$ sein kann.



Schritt 3.3: Grenzwert von Produktsummen und Stammfunktion – der Schritt zur exaktifizierenden Phase

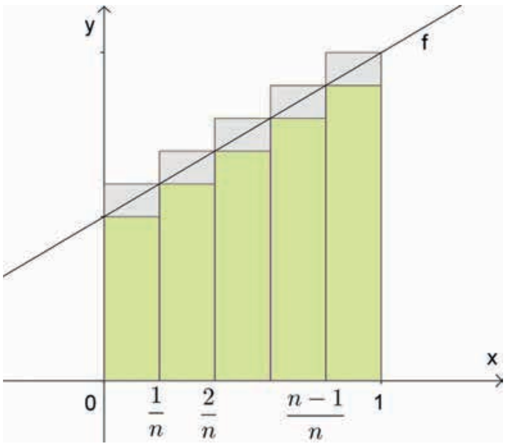
Aber wie sieht es mit der Beziehung zwischen dem Grenzwert von Produktsummen und der Stammfunktion aus? Zumindest bei linearen Funktionen könnte man solche Grenzwerte ermitteln.

Aufgaben wie die folgende zeigen, dass auch Anwendungen der arithmetischen Folge und Reihe für den Kompetenzaufbau unverzichtbar sind:

Aufgabe 10: Grenzwert von Produktsummen bei linearen Funktionen Teil 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x + 1$.

Teilen Sie das Intervall [0; 1] in n gleiche Teile, ermitteln Sie die Unter- und Obersumme in diesem Intervall sowie den Grenzwert der beiden Produktsummen!



Abgesehen von einigen Termumformungen muss man die Summenformel für die arithmetische Reihe (1 + 2 + 3 + … + n) kennen.

Etwas schwieriger ist die folgende Aufgabe, bei der der Grenzwert der Produktsumme in einem beliebigen Intervall [a; b] berechnet werden soll. Die Bearbeitung der benötigten Terme ist komplexer, aber noch immer einfacher als viele Termumformungen in den Büchern der 4. und 5. Klasse.

Aufgabe 11: Grenzwert von Produktsummen bei linearen Funktionen Teil 2

Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = x + 1$. Ermitteln Sie die Unter- und Obersumme im Intervall [a; b] sowie den Grenzwert der beiden Produktsummen!

$$U_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \left[\left(a + 0 \cdot \frac{b-a}{n} + 1\right) + \left(a + 1 \cdot \frac{b-a}{n} + 1\right) + \left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{n} + 1\right) + \ldots + \left(a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n} + 1\right)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \left[n \cdot a + n + \frac{b-a}{n} \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1))\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \left[n \cdot (a+1) + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1)\right] =$$

$$= (b-a) \cdot (a+1) + \frac{(b-a)^2}{2 \cdot n} \cdot (n-1) =$$

$$= a \cdot b - a^2 + b - a + \frac{b^2}{2} - a \cdot b + \frac{a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2 \cdot n} =$$

$$= \frac{b^2}{2} + b - \frac{a^2}{2} - a - \frac{(b-a)^2}{2 \cdot n}$$

Für $n \to \infty$ strebt der letzte Summand gegen 0.

Es ist also $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \frac{b^2}{2} + b - \frac{a^2}{2} - a = F(b) - F(a)$.

Somit ist der Grenzwert der Produktsumme gleich der Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion.

Berechnen von Grenzwerten von Produktsummen mit Hilfe von Technologie:

Schon bei den einfachsten quadratischen Funktionen ist die Komplexität der erforderlichen Operationen für die Produktsummenbildung und die Grenzwertermittlung meist zu groß. Aber warum soll man vom eigentlichen Problem des Grenzwertes von Produktsummen durch schwierige Termumformungen und Reihenentwicklungen abgeschreckt werden, wenn CAS-Werkzeuge die Rechenarbeit übernehmen können, und man sich dadurch auf das Modellieren konzentrieren kann?

Aufgabe 12: Grenzwert von Produktsummen mit Technologie

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Definition des Integrals als Grenzwert von Produktsummen und verwenden Sie die Funktionswerte am rechten Rand der Rechtecksstreifen. (Anmerkung: Für beliebige Werte von a wird nicht der Begriff *Obersumme* verwendet, da f für $x < 0$ streng monoton fallend ist.)

Es wird zuerst die Funktion f mit $f(x) = x^2$ definiert und danach $x(i)$ am rechten Rand des i-ten Rechtecksstreifens:

$$x(i) = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$$

Danach definiert man die Produktsumme mit dem Variablennamen „produktsumme(n)"und schließlich den Grenzwert der Produktsumme.
Hier zeigt sich deutlich, wie Technologie Kognition verändert. Anstatt komplexe Operationen auszuführen, können sich die Lernenden auf das Planen des gestellten Problems konzentrieren. Durch Definitionen von Variablen wird der Wortschatz der mathematischen Sprache verändert und man operiert nicht mit komplexen Termen, sondern mit ihren Namen – den Wert müsste man gar nicht sehen. Der sprachlich formulierte Plan wird direkt in mathematische Befehle umgesetzt.

$$\mathrm{produktsumme}(n) := \sum_{i=1}^{n} \left(f(x(i)) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \qquad \textit{Fertig}$$

$$\mathrm{produktsumme}(n) \qquad \frac{-(a-b)\cdot\left(a^2\cdot\left(2\cdot n^2-3\cdot n+1\right)+2\cdot a\cdot b\cdot(n-1)\cdot(n+1)+b^2\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)\right)}{6\cdot n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{produktsumme}(n)\right) \qquad \frac{-(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3}$$

$$\mathrm{expand}\left(\frac{-(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3}\right) \qquad \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

Aus der vorletzten Zeile geht klar hervor, dass Technologie mathematische Kompetenz nicht überflüssig macht. Das CAS liefert als Grenzwert der Produktsumme die faktorisierte Form des Ergebnisses. Das erwartete Resultat der Differenz der Stammfunktionswerte erfordert eine „Strukturerkennungskompetenz“, um durch die Entscheidung für den Befehl „expandiere“ zum gewünschten Ergebnis zu kommen.

Schritt 3.4: Von der Binomial- zur Normalverteilung – das Integral als Näherung für Produktsummen

Während man sich in der 7. Klasse mit diskreten Verteilungen beschäftigt, und zwar insbesondere mit der Binomialverteilung, bietet die Integralrechnung die Möglichkeit, eine Näherungsformel für die vor allem bei größeren Stichproben „unhandliche“ Binomialverteilung zu finden. Das Ergebnis ist eine Formel, die eine stetige Verteilung beschreibt. Sie wird als Normalverteilung bezeichnet.

Auf die damit zusammenhängenden Änderungen hinsichtlich der Begriffe *Wahrscheinlichkeit*, *Erwartungswert* usw. und auf die Tatsache, dass man bei stetigen Zufallsvariablen niemals punktuelle Ereignisse, sondern Intervallereignisse betrachtet, wird hier nicht näher eingegangen.

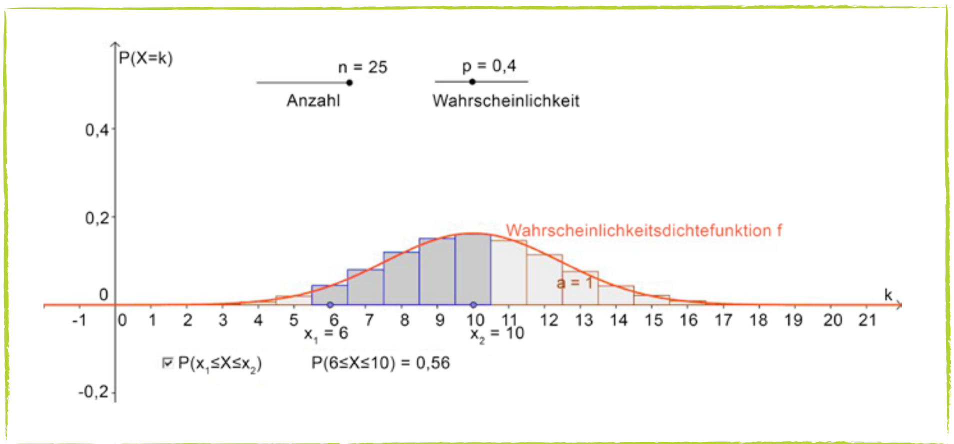
Wir wollen nur zeigen, wie man mit Hilfe von Technologie experimentell erkennen kann, dass für große n aus der „Treppenkurve“, die den oberen Rand der Rechtecke bei der Binomialverteilung bildet, als Grenzwert eine integrierbare Funktion f entsteht, die als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der stetigen Zufallsvariablen X bezeichnet wird. Dementsprechend nähert sich für große n die Produktsumme der Rechtecksflächeninhalte im Intervall $[x_1; x_2]$ dem Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$, welches die Wahrscheinlichkeit $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ angibt.

Aufgabe 13: Die Beziehung zwischen Binomial- und Normalverteilung

Es sei X eine n-p-binomialverteilte Zufallsvariable. Verändern Sie im folgenden GeoGebra-Applet die Werte von n und p und untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen der „Treppenkurve“ der Binomialverteilung und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion!

Im untenstehenden Bild nehmen die Schieberegler zuerst die Werte $n = 25$ und $p = 0{,}4$ an. Durch Einsetzen der Werte für den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ erhält man die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{2{,}45\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-0{,}5 \cdot \left(\frac{x-10}{2{,}45}\right)^2}$$



Schritt 4 (12. Schulstufe): Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten

Würde man sich im Unterricht nur auf das Ermitteln von Flächeninhalten zwischen Kurven und der *x*-Achse beschränken, könnte man die Integralrechnung eigentlich aus dem Lehrplan streichen. Erst das Nutzen des Modellcharakters des Integrals in vielen verschiedenen Kontexten lässt die Bedeutung des Integrals erkennen.

„Wir lassen uns bei der Definition des Integrals von der Interpretation als „Flächeninhalt" leiten. Haben wir einmal den allgemeinen Integralbegriff gefunden, dann „vergessen" wir diese Interpretation wieder, da das Integral in vielen anderen Zusammenhängen gebraucht wird." (Cigler, 1978, S. 117) Diese Sichtweise spiegelt sich auch im Grundkompetenzkatalog der Reifeprüfung und in Aufgabensammlungen und Schulbüchern wider:

Bezug zu Grundkompetenzen des SRP-Konzepts	
AN 4.1	Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können
AN 4.3	Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Bei manchen dieser Aufgaben schließt sich der Kreis zum „Einheitenzählen" in der 1. Klasse, wo die Lernspirale ihren Anfang hat.

Kompetenzpotential in Aufgaben finden

Berücksichtigt man die Botschaft der Bildungsstandards, so ist Kompetenzorientierung schon in der Unterstufe unbedingt notwendig. Damit verbunden ist eine Zurücknahme der reinen Rechenfertigkeitsaufgaben und eine ausgewogene Einbeziehung aller Handlungsbereiche, das heißt Modellieren, Operieren, Interpretieren und Argumentieren.

In der Oberstufe ergibt sich die Kompetenzorientierung schon aus dem gültigen Lehrplan, und zwar sowohl aus dem allgemeinen Teil als auch aus den Handlungsanweisungen beim Lehrstoff. Sie gewinnt nun an Bedeutung durch die neue Reifeprüfung. Die Nutzung von Technologie bedeutet eine Abkehr von reinen Rechenfertigkeitsaufgaben und eine Betonung anderer Handlungselemente.

Mit der kompetenzorientierten Brille betrachtet entstehen bei geänderten Fragestellungen aus traditionellen Rechenfertigkeitsaufgaben eine ganze Reihe neuer kompetenzorientierter Aufgaben zur Überprüfung von Grundkompetenzen (vgl. BIFIE, 2011, S. 114–123).

Aufgabengruppe zu Schritt 4: Von Rechenfertigkeit zu kontextbezogenen Fragestellungen

Es handelt sich bei allen Aufgaben um dieselbe Polynomfunktion.

(1) Eine traditionelle, wenig ertragreiche Aufgabe als Ausgangspunkt für kontextbezogene Aufgaben:

von der traditionellen Aufgabe ...

Gegeben ist die Polynomfunktion f mit $f(x) = -30 \cdot x^4 + 260 \cdot x^3 - 790 \cdot x^2 + 920 \cdot x$

Traditionelle Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im Intervall [1; 3].

(2) Sechs daraus entwickelte kompetenzorientierte Aufgaben zu Grundkompetenzen

Diese sechs Aufgaben sollen zeigen, wie zu ein und demselben Kontext verschiedene Problemstellungen formuliert werden können, die wiederum verschiedenen Grundkompetenzen erfordern. Es geht um den Kontext „Zuflussrate und Zuflussmenge“. Der erste Teil der Problemstellung ist immer der Gleiche, nur die Fragestellungen ändern sich.

... hin zur Kompetenzorientierung

Kontextbezogene Aufgabe 1

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 L Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit einer Zuflussrate q mit $q(t) = -30 \cdot t^4 + 260 \cdot t^3 - 790 \cdot t^2 + 920 \cdot t$. Die Zuflussrate q wird in Litern pro Stunde gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

Der Flächeninhalt unter dem Graphen von q zwischen $t = 1$ und $t = 3$ beträgt:

$\int_1^3 q(t)\mathrm{d}t \approx 581$

Was bedeutet dieser Wert im Zusammenhang mit dem Kontext „Wassertank“?

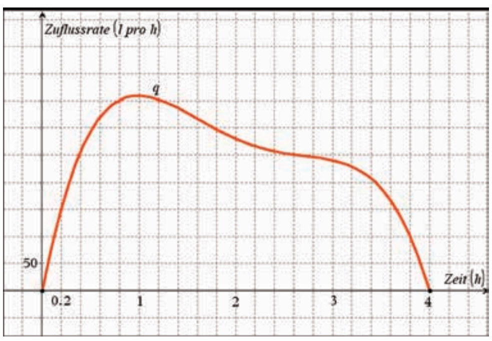
Lösungserwartung: Die zwischen 14 Uhr und 16 Uhr zugeflossene Wassermenge beträgt etwa 581 Liter.

Kommentar: Anstatt Rechenfertigkeit zu überprüfen, sind hier Kompetenzen in den Bereichen *Interpretieren* und *Argumentieren* gefragt.

Kontextbezogene Aufgabe 2

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 L Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit einer Zuflussrate q mit $q(t) = -30 \cdot t^4 + 260 \cdot t^3 - 790 \cdot t^2 + 920 \cdot t$. Die Zuflussrate q wird in Litern pro Stunde gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

Ermitteln Sie näherungsweise aus der Grafik die zwischen 13 und 17 Uhr zugeflossene Wassermenge!



Lösungserwartung: Die Lösung muss im Intervall [920; 1 020] liegen, unabhängig davon, mit welcher Methode die Schülerin/der Schüler zum Ergebnis gekommen ist.

Kommentar zur Lösung: Hier schließt sich der Kreis zur „Antarktisaufgabe“ in der 1. Klasse, wo die Schüler/innen durch Zählen der Einheitsquadrate eines Gitters den Flächeninhalt näherungsweise ermitteln sollten. Schwieriger wird die Aufgabe hier dadurch, dass zuerst der Flächeninhalt eines „Gitterrechtecks“ überlegt werden muss, sowie das Erkennen der kontextbezogenen Einheit (Liter).

Kontextbezogene Aufgabe 3

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 L Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit einer Zuflussrate q mit $q(t) = -30 \cdot t^4 + 260 \cdot t^3 - 790 \cdot t^2 + 920 \cdot t$. Die Zuflussrate q wird in Litern pro Stunde gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

Geben Sie eine Formel für das Wasservolumen im Tank um 15 Uhr an!

Lösungserwartung: $500 + \int_0^2 q(t)\mathrm{d}t$

Kommentar: Gefragt ist also nicht die Berechnung eines Integrals, sondern ein mathematisches Modell.

Kontextbezogene Aufgabe 4

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 L Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit einer Zuflussrate q mit $q(t) = -30 \cdot t^4 + 260 \cdot t^3 - 790 \cdot t^2 + 920 \cdot t$. Die Zuflussrate q wird in Litern pro Stunde gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

Der Tank fasst maximal 1400 Liter. Wie berechnet man den Zeitpunkt, zu dem der Tank überfließen wird? Geben Sie ein mathematisches Modell an!

Lösungserwartung: Man löst die folgende Gleichung nach der Zeit x auf:

$$1400 = 500 + \int_0^x q(t)\mathrm{d}t$$

Kontextbezogene Aufgabe 5

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 L Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit einer Zuflussrate q mit $q(t) = -30 \cdot t^4 + 260 \cdot t^3 - 790 \cdot t^2 + 920 \cdot t$. Die Zuflussrate q wird in Litern pro Stunde gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

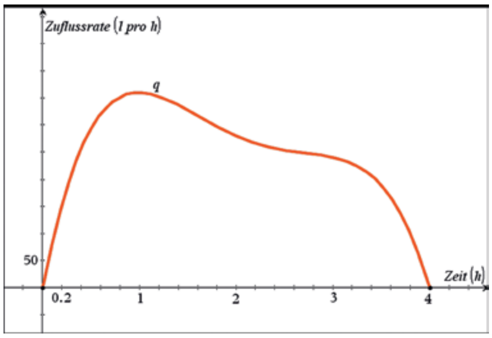
Wie kann man mit Hilfe der Integralrechnung die durchschnittliche Zuflussrate m zwischen 13 Uhr und 17 Uhr ermitteln? Geben Sie eine Formel für m an!

Lösungserwartung: $m = \dfrac{\int_0^4 q(t)\mathrm{d}t}{4 - 0}$

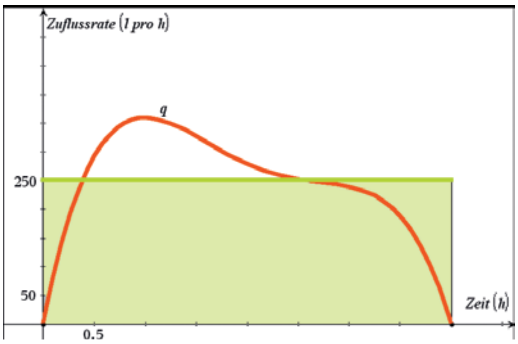
Kontextbezogene Aufgabe 6

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 L Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit einer Zuflussrate q mit $q(t) = -30 \cdot t^4 + 260 \cdot t^3 - 790 \cdot t^2 + 920 \cdot t$. Die Zuflussrate q wird in Litern pro Stunde gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

Die durchschnittliche Zuflussrate zwischen 13 Uhr und 17 Uhr beträgt 250 L/h. Zeichnen Sie in der folgenden Grafik (mit gegebenem Graphen der Funktion q) den Graphen der durchschnittlichen Zuflussrate ein!



Lösungserwartung:

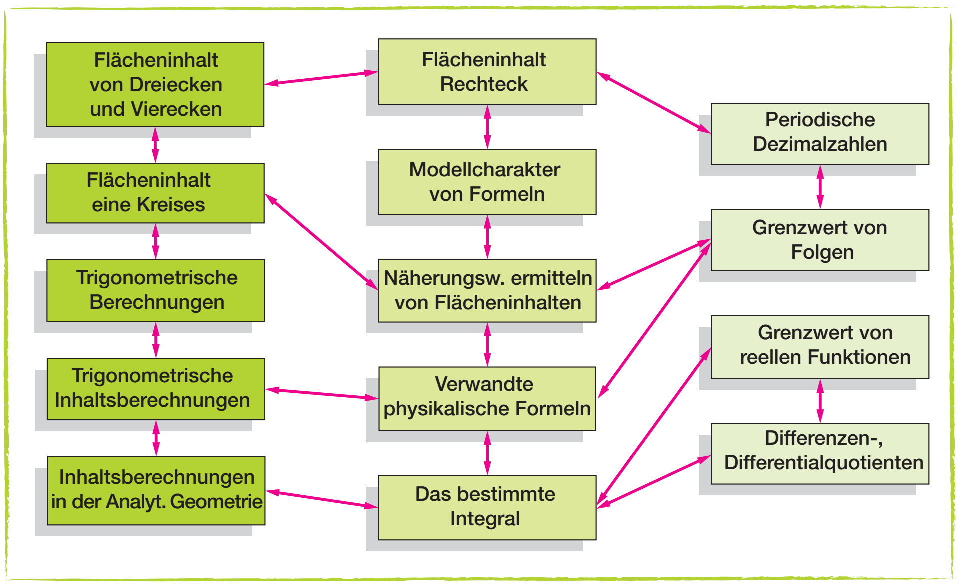


2.4.3 Zusammenfassung – langfristiges Lernen als Aufbau einer kognitiven Struktur ⇔ Aufbau eines Netzwerks

Vernetzung verschiedener Bereiche

Wenn man entlang dieser Lernlinie vom Inhalt der Rechtecksfläche zum Integral wandert, erlebt man auch, wie vernetzt verschiedene Bereiche der Mathematik miteinander sind. Man benötigt nicht nur die Kompetenzentwicklung entlang dieser Lernlinie, sondern auch Verbindungen zu anderen Gebieten. So entsteht eine Verknüpfung verschiedener Lernbereiche – ein ganzes Netz an zu entwickelnden Kompetenzen.

Für eine nachhaltige Kompetenzentwicklung ist es wichtig, dass den Schülerinnen und Schülern die Verbindungen zwischen den Knoten des Netzes bewusst werden, vor allem Verbindungen zu anderen Lernlinien oder zu früheren Stufen der durchlaufenen Lernlinie. Dadurch soll ein Prozess des „Wieder-Holens" von Grundkompetenzen angeregt werden.



2.5 Technologiegestützter Unterricht auf dem Weg zur Reifeprüfung

2.5.1 Warum Technologie im Unterricht? Welche Technologie?

- Inhaltliche Aspekte: Die Auslagerung des Operierens ermöglicht die Konzentration auf andere wesentliche Handlungen wie Modellieren, Interpretieren, Argumentieren, die auch bei der Reifeprüfung eine wichtige Rolle spielen. Technologie macht praxisnähere Anwendungen oft erst möglich und bietet eine breite Palette mathematischer Modelle, insbesondere auch solche, die bisher nicht nutzbar waren, wie etwa rekursive Modelle. Ein besonderes Qualitätsmerkmal ist die einfache Verfügbarkeit von grafischen Darstellungen.

- Lernpsychologische Aspekte (vgl. BIFIE, 2011, S. 33–41): Elaborative Lernstrategien führen zu besseren Ergebnissen: „Die Lernenden versuchen, neuen Stoff inhaltlich zu erfassen, auf Bekanntes zurückzuführen, Neues und Bekanntes zu vernetzen, Gemeinsamkeiten und Unterschiede herauszuarbeiten". Wie die Untersuchungen zeigen, schneiden Schüler/innen von Technologieklassen auch bei Vergleichsarbeiten besser ab, bei denen Technologie nicht erforderlich und auch nicht nützlich war.

- Lehrplanaspekte: Aus der Bildungs- und Lehraufgabe und aus den didaktischen Grundsätzen des aktuellen Lehrplans geht hervor, dass Technologienutzung schon jetzt verpflichtend ist. Dazu gehören das Lernen mit medialer Unterstützung (Internet usw.) und auch das Lernen mit technologischer Unterstützung: „Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, Dynamische-Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar." (BMUKK, 2004, S. 3)

- **Reifeprüfungsaspekte:** Auch wenn Technologie vor allem bei Typ-1-Aufgaben nicht direkt erforderlich ist, so unterstützt und fördert der Einsatz im Unterricht die bei der Reifeprüfung erwarteten mathematischen Kompetenzen. Sehr von Vorteil bei der Prüfung selbst ist der direkte Zugriff auf grafische Darstellungen, das Experimentieren mit Lösungsvarianten und das Auslagern von Operationen, die bei der Beantwortung der Fragen hilfreich sein können. Ab 2018 ist der Einsatz von Technologie inklusive CAS bei der Reifeprüfung verpflichtend. Das heißt, es wird Aufgaben geben, die ohne die entsprechende Technologie nicht lösbar sein werden. Damit ist aber der Technologieeinsatz im Unterricht schon sehr viel früher unverzichtbar!

2.5.2 Planungsaspekte für technologiegestützten Unterricht

die zentrale Rolle der Technologie im SRP-Konzept

Fälschlicherweise spricht man oft vom „Rechner“. Operieren ist aber nur ein Teil der vielfältigen Anwendungen moderner Unterrichtstechnologie. Besser würde der Begriff *Lernplattform* passen, bei der verschiedene Werkzeuge wie Tabellenkalkulation, Funktionenplotter, Computeralgebra und dynamische Geometrie unter einer gemeinsamen Benutzeroberfläche vernetzt arbeiten. Ein wirksamer Einsatz solcher Werkzeuge erfordert aber eine Neuausrichtung des Unterrichts.

Drei Aspekte sollten miteinander vernetzt bei der Planung und Realisierung des Unterrichts berücksichtigt werden:

- Inhalt
- Lernphasen
- Werkzeugart

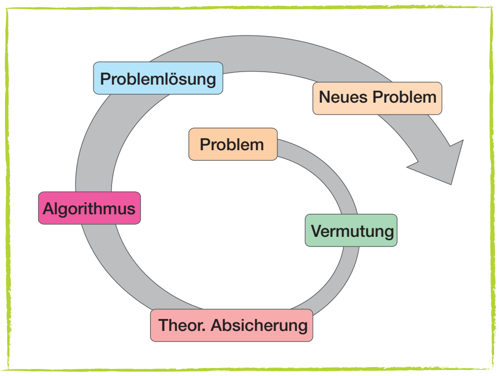
Der mathematische Inhalt

Ausgangspunkt für die Planung von Unterricht ist meist der zu behandelnde Inhalt (z. B. exponentielle Wachstumsprozesse, Einstieg in die Differentialrechnung). Wichtig ist eine kompetenzorientierte Inhaltsanalyse, das bedeutet:

- Überlegungen zu Vorerfahrungen
- Analyse der erforderlichen Grundkompetenzen (früher erworbene, neue)
- Entwicklung neuer Begriffe und Algorithmen
- erforderliche Exaktifizierungsmaßnahmen
- Berücksichtigen aller Handlungsbereiche (Modellieren, Operieren, Interpretieren, Argumentieren)
- Überlegungen zur Anwendbarkeit und zu Vernetzungen (innermathematisch und anwendungsbezogen)

Die Lernphasen

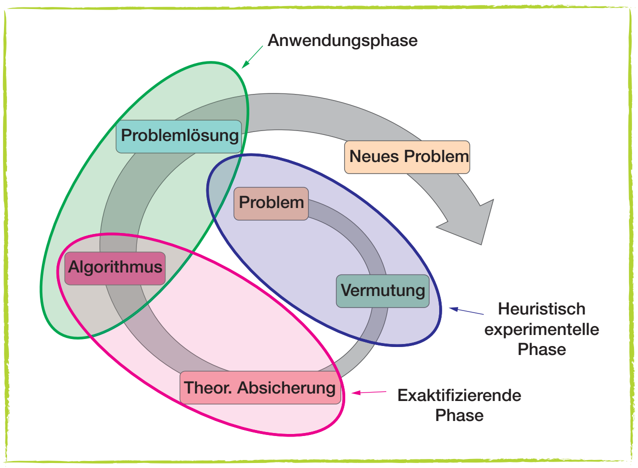
Beobachtet man die Lernenden auf ihrem Weg in die Mathematik, könnte eine Spirale als Modell für diesen Prozess dienen (vgl. Buchberger, 2003):



- Ausgangspunkt eines Spiraldurchlaufs sind Beobachtungen, Datenmaterial oder Probleme, zu deren Lösung schon verfügbare Algorithmen ausgewählt oder neue gefunden werden müssen. Vermutungen werden formuliert, erste Begründungs- und Beweisideen überlegt oder Modelle gebildet.
- Danach sollen die Vermutungen durch eine theoretische Absicherung auf eine gesicherte Basis gestellt werden, es muss exaktifiziert werden: Dies ist die Phase des Begründens und Beweisens; Modelle müssen hinterfragt und eventuell verbessert werden.
- Nun gilt es, gestützt auf das erworbene Wissen, Algorithmen oder Programme zu entwickeln, die für die Problemlösung notwendig sind. Testen und Festigen durch Üben gehören auch zu wichtigen Tätigkeiten in dieser Phase.
- Die erworbenen Kenntnisse und Strategien werden beim Abschluss dieses Spiraldurchlaufs zum Lösen des Ausgangsproblems verwendet.
- Neue Probleme erfordern wiederum neue Spiraldurchläufe.

Zusammenfassend kann man die Tätigkeit des Lernenden bei einem solchen Spiraldurchlauf in drei Phasen einteilen (vgl. Heugl, Klinger & Lechner, 1996, S. 82):

- die heuristische, experimentelle Phase
- die exaktifizierende Phase
- die Anwendungsphase



Die Werkzeugart

Wie und wofür Technologie eingesetzt wird, richtet sich nach der Art der verfügbaren Technologie. So bieten Werkzeuge mit Computeralgebra ganz andere Möglichkeiten als Werkzeuge, die lediglich numerisch rechnen. Es gibt verschiedene Einteilungskriterien:

a) nach der Art der Hardware:

- sogenannte „Handhelds“ oder „Taschenrechner“: Grafikrechner, CAS-Rechner
- mathematische Software, die auf Notebook oder PC läuft
- mathematische Software für Tablet-PC, iPad, Mobiltelefon usw.

b) nach der Art der Software:

- numerisch rechnende, grafikfähige Software
- Tabellenkalkulation
- computeralgebrataugliche Software
- Dynamische-Geometrie-Software
- inhaltsbezogene Software wie etwa Statistikprogramme

Für einen wirkungsvollen Einsatz sollte eine Lernplattform verfügbar sein, bei der unter einer gemeinsamen Benutzeroberfläche verschiedene Werkzeuge miteinander vernetzt zum Einsatz kommen können (CAS, Tabellenkalkulation, Grafik, dynamische Geometrie, Textverarbeitung usw.).

Entscheidend für den „Wirkungsgrad" der Technologie ist auch die Verfügbarkeit in allen Lern- und Prüfungssituationen. Nur wenn das Werkzeug ständig im Unterricht, zu Hause und bei Prüfungen verfügbar ist, kann eine deutliche Qualitätsentwicklung des Mathematikunterrichts erwartet werden.

2.5.3 Unterrichtsbeispiele für die Technologienutzung in den verschiedenen Lernphasen

Technologie als Unterstützung beim Verständnisaufbau

Auf dem Weg in die Mathematik hat das Werkzeug in den einzelnen Lernphasen verschiedene Funktionen. Die heuristisch-experimentelle Phase ist oft überhaupt erst durch Technologie möglich, in der exaktifizierenden Phase können komplexe Operationen ausgelagert werden und in der Anwendungsphase sind praxisnähere Problemstellungen möglich, da neue Modelle wie etwa Differenzengleichungen genutzt werden können. Ganz wesentlich ist, dass man die Darstellungsformen leicht wechseln kann (grafische Darstellung, Termdarstellung, rekursive Darstellung usw.), und dass verschiedene Darstellungen parallel zur Verfügung stehen.

Natürlich sind die einzelnen Phasen beim Problemlöseprozess nicht isoliert voneinander, sondern eng vernetzt. Das erkennt man besonders bei den Aufgaben der Anwendungsphase, wo das Modellieren häufig mit Experimentieren beginnt, aber auch reflektiert und begründet werden muss. Beim Operieren ist oft eine Entscheidung zwischen experimentellem und exaktem Lösungsweg zu treffen, und beim Interpretieren sind innermathematische und kontextbezogene Begründungen notwendig.

Beispiele für die heuristisch experimentelle Phase

Aufgabe 1: Sicherheitsabstand – Verkehrsfluss (Malle, 2011, S. 88)

Für den Sicherheitsabstand *s* zweier Autos, die auf trockener Straße fahren, gilt folgende Faustformel:

$$s(v) = \frac{v^2}{100} + \frac{v}{3{,}6} + 6$$

Dabei ist *v* die Geschwindigkeit (in km/h). Beim Aufstellen der Formel wurden der Bremsweg, der Reaktionsweg und die Länge des Fahrzeuges berücksichtigt.

Die Verkehrsdichte *d* beschreibt die Anzahl der Fahrzeuge pro Stunde in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit *v*. Sie ist durch folgende Formel gegeben:

$$d(v) = \frac{1000 \cdot v}{s(v)}$$

a) Zeichnen Sie den Graphen der Verkehrsdichte *d* für $5 \leq v \leq 100$!

b) Für welche Geschwindigkeit ist die Verkehrsdichte am größten?

c) Überlegen Sie, warum die häufige Meinung, die Verkehrsdichte wäre bei hoher Geschwindigkeit sehr groß, falsch ist!

Didaktischer Kommentar

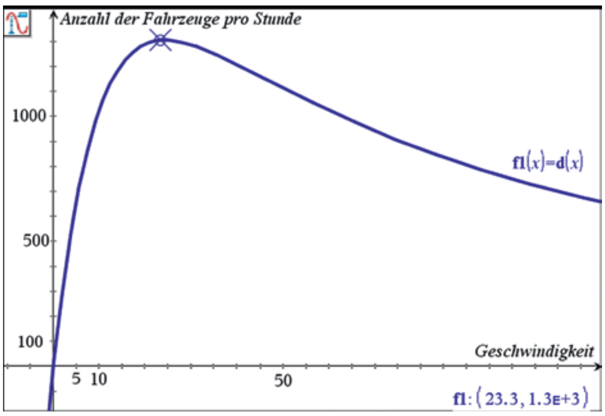
Optimierungsaufgaben sollen nicht ausschließlich mit Hilfe der Differentialrechnung behandelt werden. Schon im Lehrplan der 5. und 6. Klasse wird diese Frage thematisiert:

- 5. Klasse: „Untersuchen von Formeln im Hinblick auf funktionale Aspekte“
- 6. Klasse: „Untersuchen von Eigenschaften reeller Funktionen (Monotonie, globale und lokale Extremstellen, Symmetrie, Periodizität)“

Insbesondere die grafische Darstellung und die Tabelle können bei Nutzung von Technologie für die Bearbeitung solcher Aufgaben verwendet werden.

Möglicher Lösungsweg ohne Differentialrechnung

Im Spurmodus (bzw. Tracemodus) zieht man den Cursor entlang des Graphen und sucht mit Hilfe der Koordinaten des Punkts (rechts unten) den maximalen Wert. Durch Zoomen könnte man die Genauigkeit auch noch steigern, was aber bei dieser Aufgabe nicht notwendig ist.



Ergebnis: Bei etwa 25 km/h ist die Verkehrsdichte am größten.

Verwendetes Werkzeug: TI Nspire

Gefahr: Manche Werkzeuge sind – bezogen auf die aktuellen Lernziele – mitunter „zu kompetent“ und verleiten zum Nutzen als Black Box. So kann man etwa beim TI Nspire mit dem Werkzeug *Graph analysieren* oder mit dem *Funktionsinspektor* bei GeoGebra alle wichtigen Informationen einer Kurvendiskussion erhalten.

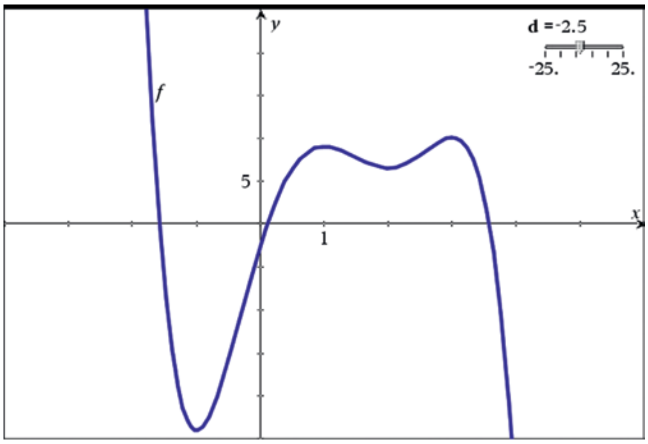
Man wählt im Menu „Graph analysieren“ den Befehl „Maximum“. Nachdem man im Graphikfenster mit dem Cursor eine untere und eine obere Schranke bestimmt hat, gibt das Werkzeug das Maximum an.

Aufgabe 2: Experimentieren durch Verwendung von Schiebereglern

Gegeben ist die Funktionenschar f mit $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + 5x^4 - \frac{20}{3}x^3 - 10x^2 + 24x + d$.

Definieren Sie einen Schieberegler für d und geben Sie Werte für d an, bei denen die Funktion eine, zwei, vier oder fünf Nullstellen hat!

Mögliche Lösung



Verwendetes Werkzeug: TI Nspire

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe zeigt die Möglichkeit auf, Grundkompetenzen der Reifeprüfung durch dynamisches Experimentieren zu erwerben, wie zum Beispiel:

Technologie und Grundkompetenzen

Bezug zu Grundkompetenzen des SRP-Konzepts	
FA 4.4	Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

Der elaborative, experimentelle Zugang führt sicher zu einer größeren Nachhaltigkeit als das reproduktive Aneignen von Sätzen und Regeln.

Die Aufgabe zeigt aber auch die Grenzen des Experimentierens und die Notwendigkeit der algebraischen Behandlung dieser Frage. Auch bei kleiner Schrittweite ist die Suche nach vier Nullstellen schwierig. Aber die ersten Vermutungen helfen in der Folge beim algebraischen Lösen.

Das Experimentieren in der heuristischen Phase sollte die exaktifizierende Phase nicht vollkommen ersetzen, sondern als Vorbereitung für die theoretische Absicherung dienen – Vermuten als Vorstufe des Beweisens.

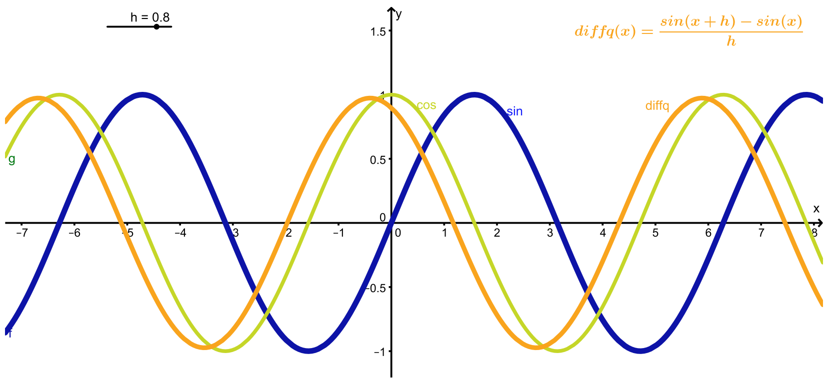
Aufgabe 3: Experimentelle Ermittlung der Ableitung der Sinusfunktion

Versuchen Sie, im Graphikfenster die Ableitung der Sinusfunktion durch Experimentieren mit der Differenzenquotientenfunktion „diffq" zu finden.

$$diffq(x) = \frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h}$$

Definieren Sie zuerst für *h* einen geeigneten Schieberegler. Zeichnen Sie die Graphen der Sinus- und Cosinusfunktion sowie den Graphen der „diffq"-Funktion. Was passiert mit der „diffq"-Funktion, wenn *h* gegen 0 strebt?

Mögliche Lösung



Geht *h* gegen 0, so wandert die „diffq"-Funktion gegen die Cosinusfunktion. Wichtig ist, dass die „diffq"-Funktion für $h = 0$ verschwindet, d. h. nicht definiert ist, oder scheinbar von der Cosinusfunktion „überdeckt" wird.

Didaktischer Kommentar

Technologie und selbstentdeckendes Lernen

Die exaktifizierende Phase für die Ableitung der Winkelfunktionen ist schwierig und wird selten gemacht. Das Experimentieren mit der Technologie führt durch selbstentdeckendes Lernen zu einer Vermutung. Die Schüler/innen sind nicht nur auf eine Definition durch den Lehrer oder die Lehrerin angewiesen. Damit unterstützt diese Art des Lernens den Erwerb der im Reifeprüfungskonzept angesprochenen Grundkompetenz:

Bezug zu Grundkompetenzen des SRP-Konzepts	
AN 1.2	Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane" Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können

Beispiele für die exaktifizierende Phase

Der größte Nutzen der Technologie in dieser Phase besteht wohl in der Auslagerung komplexer Operationen und in der direkten Verfügbarkeit von Visualisierungen.

Auslagerung und Visualisierung

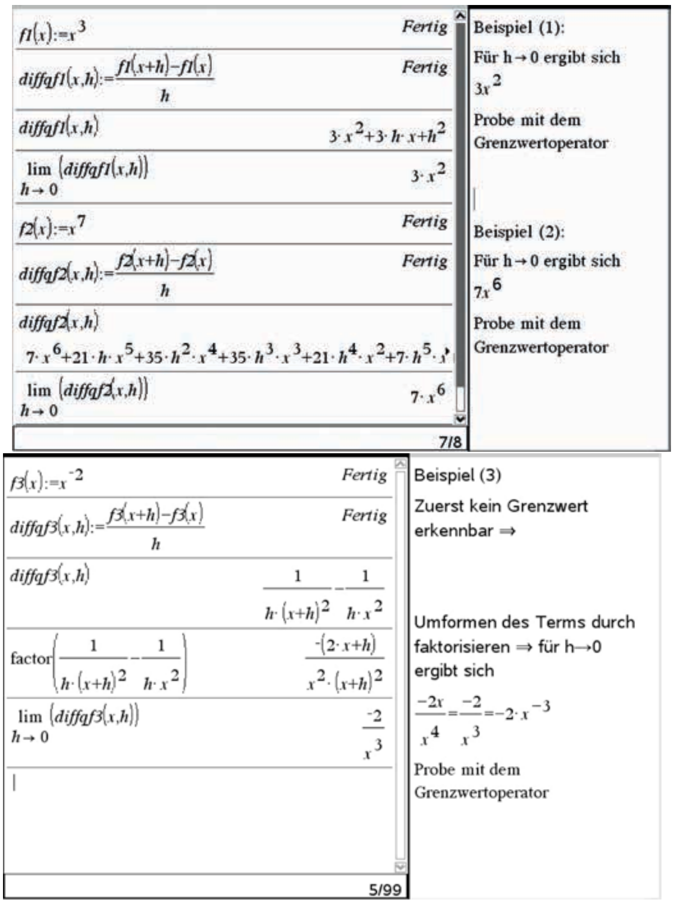
Aufgabe 4: Vermuten von Ableitungsregeln durch Berechnen des Grenzwerts des Differenzenquotienten

Berechnen Sie den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ für die folgenden Funktionsbeispiele, vereinfachen Sie den Term und ermitteln Sie den Grenzwert für $h \to 0$! Ist eine Regel erkennbar? Formulieren Sie die erkennbare Regel!

Beispiele:

(1) $f_1(x) = x^3$ (2) $f_2(x) = x^7$ (3) $f_3(x) = x^{-2}$

Mögliche Lösung



Didaktischer Kommentar

Schon geeignete Termumformungen beim Differenzenquotienten, die die Lernenden wählen, die aber die Technologie ausführt, ermöglichen erste Vermutungen über einen Grenzwert. Das Auslagern der Grenzwertberechnung auf die Technologie bestätigt dann die Vermutungen über die Ableitung von Potenzfunktionen. Wie weit dann allgemeine Beweise geführt werden, ist eine didaktische Entscheidung der/des Lehrenden.

Die Aufgabe zeigt aber auch, dass die Schüler/innen beträchtliche algebraische Kompetenzen benötigen, um sich für die richtigen Befehle bei den algebraischen Umformungen zu entscheiden.

Eine wichtige Grundlage für den nachhaltigen Kompetenzerwerb ist die aktiv von den Schülerinnen und Schülern entwickelte Lernunterlage (im klassischen Unterricht ist es das Schul- und Hausübungsheft). Bei den obigen Bildern sieht man eine Möglichkeit der Gestaltung einer elektronisch entwickelten Lernunterlage. Durch Einfügen eines Textfensters (beim TI Nspire „Note Fenster“) kann der Lösungsweg direkt dokumentiert und es können sofort Interpretationen und Argumentationen eingefügt werden.

Beispiele für die Anwendungsphase

Gerade das Nutzen mathematischer Kompetenzen für das Lösen von Problemen in kontextbezogenen Situationen ist auf dem Weg zur Reifeprüfung äußerst wichtig, wird doch im Teil 2 der Reifeprüfung genau diese Kompetenz überprüft.

Technologie als Hilfsmittel zur Vereinfachung ...

Entsprechend den derzeitigen Richtlinien zur neuen Klausur wird gerade auf naturwissenschaftliche und finanzmathematische Kontexte Wert gelegt. In diesen Anwendungsbereichen können bei Nutzung von Technologie sehr praxisnahe Probleme behandelt werden, die sonst wegen der Datenfülle oder der Komplexität der Operationen nicht zugänglich wären. Neue Anwendungsbereiche werden durch rekursive Modelle und durch die Möglichkeit der Approximation von Datenmengen erschlossen.

Aufgabe 5: Bausparkredit

Herr Mathemat benötigt ein Bauspardarlehen in der Höhe von € 140.000 mit einer Laufzeit von 30 Jahren. Derzeit beträgt der Zinssatz 3,5 %. Der Zinssatz kann gemäß dem Index Euribor auf bis zu 6 % steigen. Für die ersten 4 Jahre werden 3,5 % garantiert, es wird für die Tilgung eine Jahresrate von € 7.000 vereinbart. Definieren Sie einen Schieberegler für den Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ und die Jahresrate!

a) Wie hoch muss die Jahresrate unter der Annahme $p = 3,5$ % sein, um den Kredit nach 30 Jahren getilgt zu haben?

b) Untersuchen Sie den Verlauf der Tilgung unter der Annahme, dass der Zinssatz auf bis zu 6 % steigt!

Didaktischer Kommentar 1

Bei dieser Aufgabe liegt der Nutzen der Technologie in der Verwendung eines rekursiven Modells. Während ohne Technologie solche Probleme bestenfalls in der 6. Klasse beim Kapitel „Folgen und Reihen“ mit Hilfe von Logarithmen lösbar wären, genügen bei Technologienutzung Grundkompetenzen aus der Sekundarstufe I zum Prozent rechnen und Grundkompetenzen aus der Analysis, um das Problem zu behandeln (AN 1.4: Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können). Gerade das Reflektieren über Ergebnisse wird durch das experimentelle Arbeiten mit Schiebereglern unterstützt.

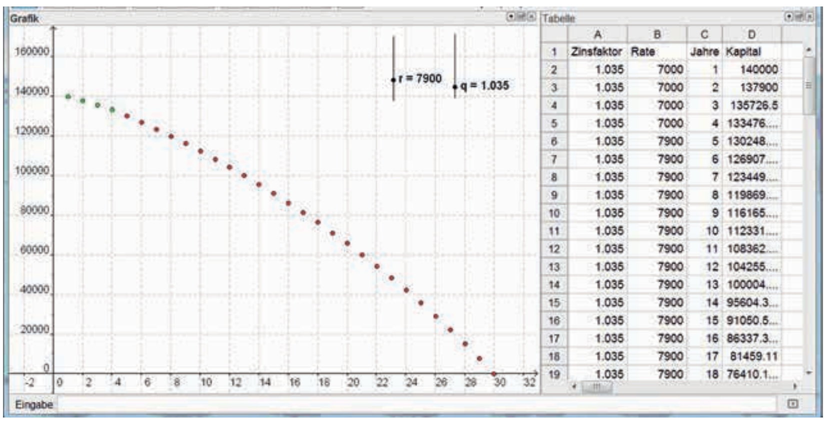
Das rekursive Modell reduziert das Problem auf die Frage: Was passiert jedes Jahr? Die Antwort ist schon der wichtigste Schritt bei der Modellentscheidung: Das Kapital wird verzinst und die Rate wird abgezogen. Die Übersetzung in die Sprache der Mathematik ist dann nicht mehr so schwierig:

... und Modellbildung

$$K_{neu} = K_{alt} \cdot (1 + + \frac{p}{100}) - r$$

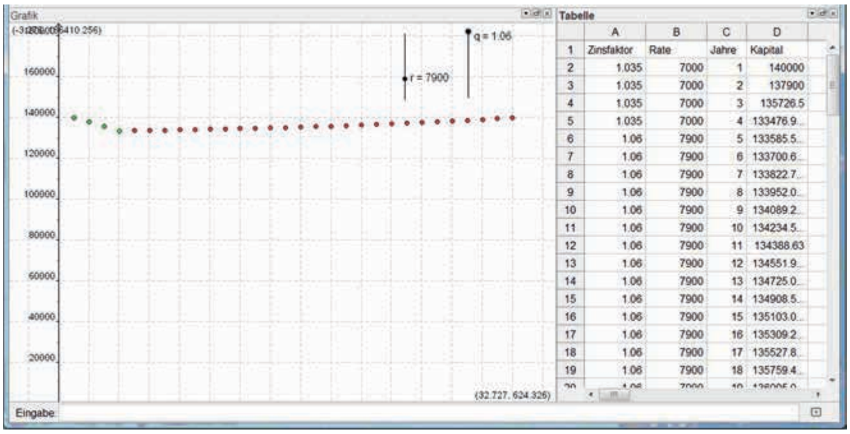
Natürlich ist das eine Modellvereinfachung im Vergleich zur banküblichen Verrechnung, aber das Wesentliche eines Tilgungsplans wird dadurch doch erfasst.

Mit einer Lernumgebung wie etwa GeoGebra, bei der Tabellenkalkulation und Grafik unter einer gemeinsamen Benutzeroberfläche angeboten werden, kann die Lösung mit Hilfe von Schiebereglern für r und für $q = (1 + + \frac{p}{100})$ experimentell gefunden werden.



Man hält zuerst q bei 1,035 fest und verändert r so lange, bis der Kredit nach 30 Jahren abgezahlt ist. Es ergibt sich eine Jahresrate von etwa € 7.900.

Steigert man den Zinssatz auf den von der Bank als möglich angegebenen Wert von 6 %, stellt man erschrocken fest, dass nach 30 Jahren der Schuldenstand trotz jährlicher Zahlung von € 7.900 annähernd gleich geblieben ist.



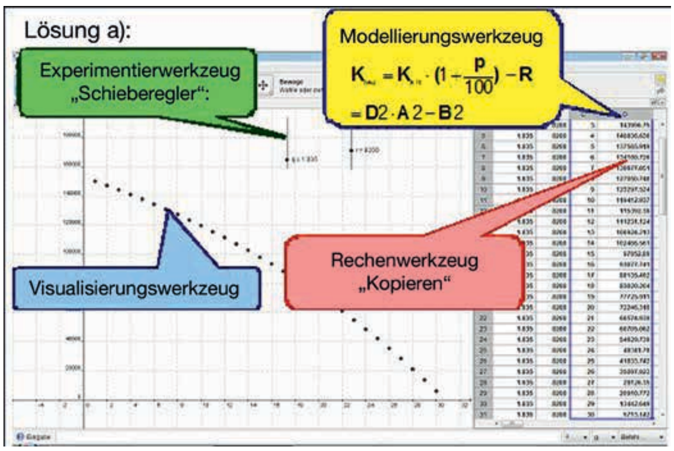
Verwendetes Werkzeug: GeoGebra

Dann bleibt nichts anderes übrig, als am „Ratenschieberegler“ so lange zu drehen, bis man das Ziel, nach 30 Jahren schuldenfrei zu sein, wieder erreicht hat. Das bedeutet aber, dass man jährlich etwa € 2.400 mehr bezahlen muss.

Didaktischer Kommentar 2

„Werkzeugkompetenz“

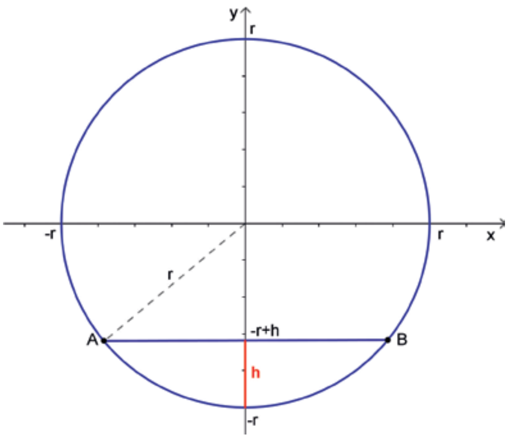
Es werden also alle vier im Praxishandbuch Teil 1 beschriebenen Werkzeugkompetenzen zur Problemlösung genutzt:



Aufgabe 6: Öltank

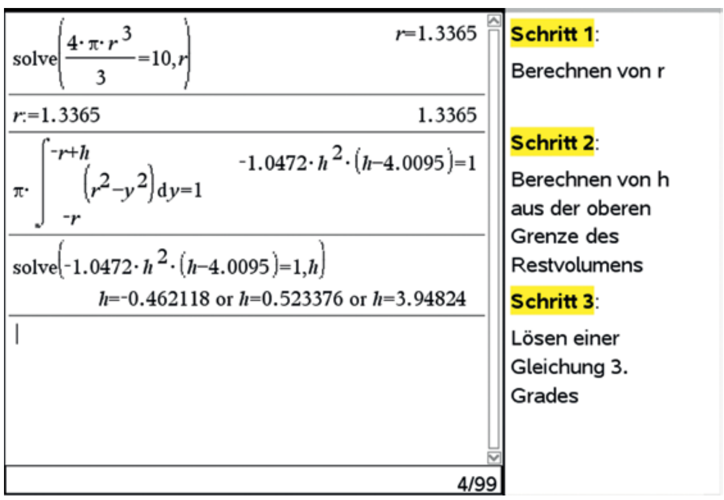
Eine Firma stellt kugelförmige Öltanks her, die 10 000 Liter fassen. Im Inneren des Tanks soll ein Kontakt angebracht werden, der ein Warnsignal als Aufforderung für das Nachfüllen auslöst, wenn nur mehr 1 000 Liter Öl im Tank sind.

In welcher Höhe muss dieser Kontakt angebracht werden?



Möglicher Lösungsweg

Eine erste Schwierigkeit für die Schüler/innen stellt schon das Ermitteln der geeigneten Einheiten dar: 10,00 Liter = 10,00 dm^3. Man wird besser im m^3 umrechnen, um dann die Längen in m zu erhalten.



Verwendetes Werkzeug: TI Nspire

Das mathematische Modell liefert drei Lösungen. Nun muss überlegt werden, welche davon für das praktische Problem sinnvoll ist. Da der Kugelradius 1,365 m ist, kommt als sinnvolle Lösung für h nur 0,523 m in Frage.

Didaktischer Kommentar

Schwerpunkt auf Planen, Interpretieren und Argumentieren

Bei dieser Aufgabe besteht der Vorteil der Technologie in der Auslagerung komplexer Operationen. Die Aktivitäten der Schüler/innen konzentrieren sich auf das Planen und Interpretieren:

- Modellbilden – Entscheidung für ein Modell und für einen geeigneten Berechnungsmodus („approximiert")
- kontextbezogenes Interpretieren der angebotenen Lösungen des mathematischen Modells

Aufgabe 7: Kostenfunktion (Polynomfunktion als Approximationsfunktion zu Datenmengen)

Vom Kostenverlauf eines Betriebs kennt man folgende Daten:

Stückzahl x	0	2	3	5	8	10	12	15	18
Kosten $k(x)$	1 000	1 600	1 770	2 000	2 100	3 000	3 070	7 000	12 090

Die Anzahl der produzierten Stück x wird in Mengeneinheiten (ME) angegeben, die Kosten k in Geldeinheiten (GE).

a) Zeichnen Sie den Punktgraphen der Funktion k in einem geeigneten Koordinatensystem. Suchen Sie ein geeignetes mathematisches Modell für die Gesamtkostenfunktion „kost", zeichnen Sie den zugehörigen Graphen und interpretieren Sie den Verlauf der Kostenfunktion unter Verwendung der Begriffe der Wirtschaftsmathematik („degressiv – progressiv", „Grenzkosten", „Fixkosten").

b) Ermitteln Sie die Stückkostenfunktion „skost" (Kosten pro Stück). Bei welcher Stückzahl werden die Stückkosten minimal (Betriebsoptimum)?

c) Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem den Graphen der Kostenfunktion und der Stückkostenfunktion. Zeichnen Sie an der Stelle des Betriebsoptimums die Tangente an den Graphen der Kostenfunktion „kost". Was fällt Ihnen auf?

d) Beweisen Sie: Es sei K eine beliebige Kostenfunktion, dann geht die Tangente an den Graphen der Kostenfunktion K an der Stelle des Betriebsoptimums stets durch den Koordinatenursprung.

Verwendetes Werkzeug: TI Nspire

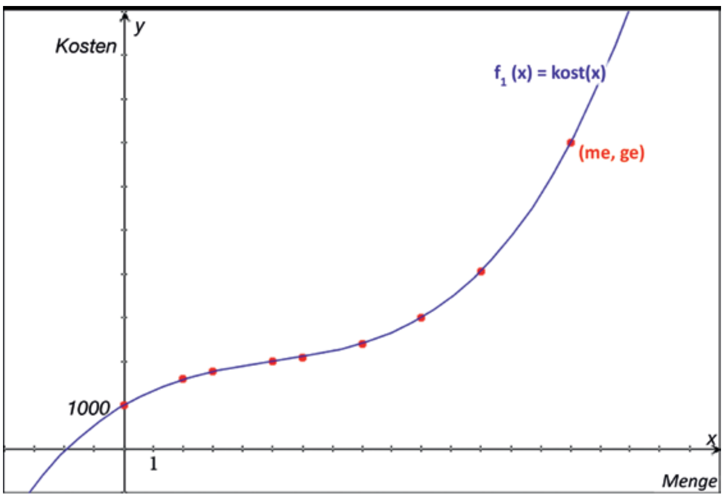
Lösungsvorschlag

Zu a: Nachdem man die Daten in der Tabellenkalkulation („List&Spreadsheet") eingetragen hat, wird der Punktgraph in einem geeigneten Koordinatensystem eingezeichnet. Aus dem Verlauf des Graphen vermutet man eine passende Approximationsfunktion (in diesem Fall eine Polynomfunktion 3. Grades), die dann mit den passenden Statistikwerkzeugen ermittelt und im Graphikfenster eingezeichnet wird.

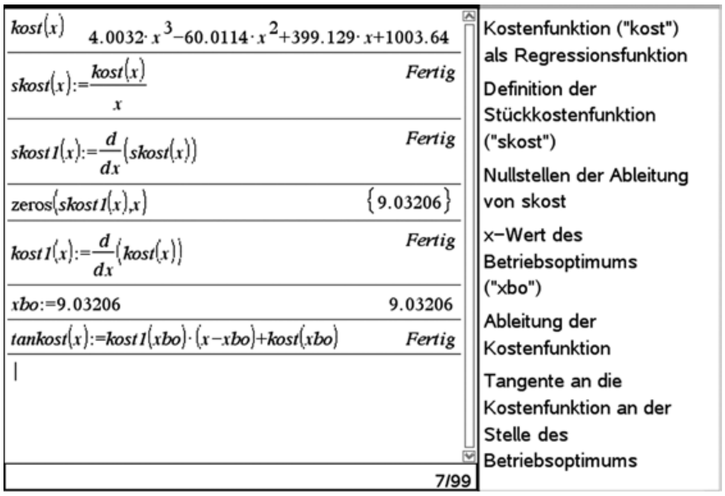
	A me	B ge	C	D	E	F	G
◆					=CubicReg(me,ge,1): (		
1	0.	1000.		Titel	Kubische Regression...		
2	2.	1600		RegEqn...	a*x^3+b*x^2+c*x+d		
3	3.	1770		a	4.0032		
4	5.	2000.		b	-60.0114		
5	6.	2100		c	399.129		
6	8.	2400		d	1003.64		
7	10.	3000.		R²	0.999999		
8	12.	4070		Resid	{-3.6430567367,6.11...		
9	15.	7000.					
10	18.	12090					
11							
12							
13							
14							
A14							

Didaktischer Kommentar 1

Um mit mathematischen Methoden Datenmengen untersuchen zu können, sollte neben der Darstellung einer funktionalen Abhängigkeit als Datenmenge auch die Termdarstellung einer passenden Approximationsfunktion verfügbar sein. Aktuelle Technologien bieten eine beträchtliche Zahl solcher Funktionen. Dazu müssen die Schüler/innen aber die Eigenschaften der wichtigsten Funktionsarten kennen, um aus dem Punktgraphen (rot) über eine passende Approximation entscheiden zu können. Die von der Software angegebenen Parameter (etwa der Determinationskoeffizient R^2) können dabei als Hilfe bei Unsicherheiten dienen.



Zu b:



Wieder werden die Lösungsschritte im „Notes-Fenster" beschrieben und kommentiert.

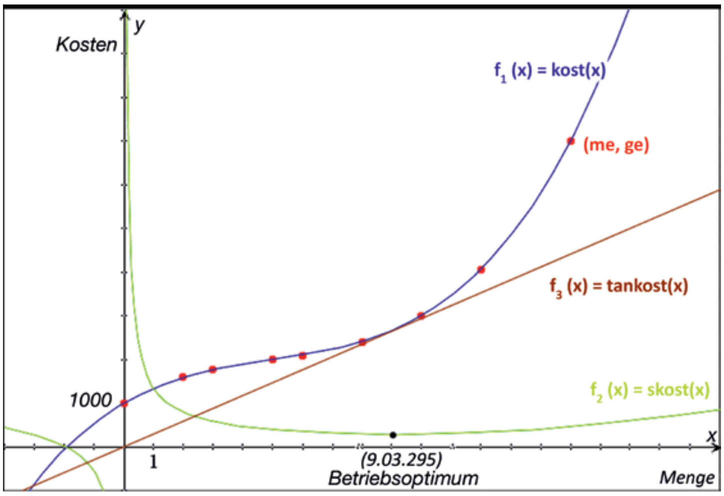
Didaktischer Kommentar 2

Im Algebrafenster ist zu sehen, dass nicht mit den Funktionstermen, sondern mit den Namen der Funktionen operiert wird. Die sprachliche Formulierung der Planung wird direkt in mathematische Operationen umgesetzt, durch Definitionen entstehen immer neue mathematische Sprachelemente:

Verbale Umschreibung	Mathematik
Definieren der Stückkostenfunktion „skost"	$\text{skost}(x) := \frac{\text{kost}(x)}{x}$
Ableitung der Stückkostenfunktion „skost1"	$\text{skost1}(x) := \frac{d}{dx}(\text{skost}(x))$
Nullstellen der Ableitung	$\text{zeros}(\text{skost1}(x), x)$

Das Definieren neuer Sprachelemente und das Arbeiten mit diesen Namen sind schöne Beispiele dafür, wie Technologie Kognition nicht nur unterstützt, sondern verändert. Es handelt sich um eine neue Qualität mathematischen Denkens.

Zu c: Die Graphen aller behandelten Funktionen werden im Graphikfenster dargestellt.



Didaktischer Kommentar 3

Eine wichtige Frage im Zusammenhang mit dem Einsatz von Technologie im Rahmen der Reifeprüfung wird sein, in welcher Form der Lösungsweg und die Lösung kommentiert und erläutert werden müssen. Gewisse grundsätzliche Normen für das Kommentieren werden erforderlich sein. Das Nutzen des „Notes-Fensters“ für Kommentare und das entsprechende Beschriften sowie die Angabe der Einheiten im Graphikfenster sind ein erster Ansatz.

Dokumentation des Lösungswegs

Zu d: Die Tangente an den Graphen der Kostenfunktion an der Stelle des Betriebsoptimums geht durch den Koordinatenursprung.

Beweis von Teilaufgabe d:

$$\text{skost}(x) = \frac{\text{kost}(x)}{x} \Rightarrow \frac{\text{d}}{\text{d}x}(\text{skost}(x)) = \frac{\frac{\text{d}}{\text{d}x}\text{kost}(x) \cdot x - \text{kost}(x)}{x^2} = 0 \text{ (Betriebsoptimum)}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{d}}{\text{d}x}\text{kost}(x) \cdot x - \text{kost}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\text{d}}{\text{d}x}\text{kost}(x) = \frac{\text{kost}(x)}{x} \text{ (Steigung der linearen homogenen Funktion)}$$

Didaktischer Kommentar 4

Der Beweis zur Teilaufgabe d zeigt, dass nicht alle gestellten Fragen mit Technologie beantwortet werden können. So geht beispielsweise die experimentell ermittelte Tangente an die Kostenfunktion wegen Rechenungenauigkeit nicht durch den Koordinatenursprung.

2.5.4 Zusammenfassung

Technologie als Motor zur Kompetenzentwicklung

Wir leben in einer Zeit, in der Technologie im Unterricht – unabhängig von der Einführung der neuen Reifeprüfung – unverzichtbar ist. Die Schüler/innen erleben Mathematik durch ihren Einsatz noch bewusster als einen möglichen Modus der Weltbegegnung. Dabei ist Technologie eine spezifische Brille, die Welt um sich herum zu sehen bzw. zu modellieren, und zwar durch vielfältige Darstellungsformen und durch die Förderung der dafür erforderlichen Denktechnologie (vgl. IDM, 2009).

Nimmt man als theoretische Orientierung für einen kompetenzorientierten Unterricht die Definition von Weinert („Mathematische Kompetenz als Problemlösefähigkeit in variablen Situationen"), so ist sinnvoll eingesetzte Technologie ein wichtiger Motor für die Kompetenzentwicklung der Lernenden.

2.6 Der Inhaltsbereich *Wahrscheinlichkeit(srechnung) und Statistik*

Auch diesem in der Schule lange nur wenig berücksichtigten Themengebiet wird im Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik (vgl. BIFIE, 2013a) eine bedeutende Rolle zugewiesen. *Wahrscheinlichkeit und Statistik* stellt dort einen der vier ausgewiesenen Inhaltsbereiche dar.

Vor dem bildungstheoretischen Hintergrund, der dieser Konzeption zugrunde liegt, ist die von Fischer (1999) aufgeworfene Frage „Wie viel Mathematik und welche Mathematik sollen Heranwachsende zu ihrem eigenen Nutzen und zum Nutzen unserer Gesellschaft lernen?" von besonderem Interesse. Am in diesem Beitrag in den Fokus der Betrachtungen gestellten Themengebiet führt – nicht nur aus dieser gesellschaftlichen Perspektive betrachtet – kein Weg vorbei. Dies liegt unter anderem darin begründet, dass statistische Erhebungen in alltäglichen Bereichen selbstverständlich eingesetzt und insbesondere auch anhand von Darstellungen/Grafiken interpretiert werden müssen. In vielen Medien findet man Ergebnisse statistischer Erhebungen in entsprechender Weise ohne weitere (mathematische) Erläuterungen dargestellt. Der Umgang mit (großen) Daten(mengen) bzw. deren Interpretation wird auch von Nicht-Mathematikerinnen und Nicht-Mathematikern immer wieder eingefordert.

So gesehen ist dieser in der Schule zu vermittelnde Themenbereich vielleicht sogar der wichtigste, den man Schülerinnen und Schülern verständig näherbringen sollte, da sie im täglichen Leben immer wieder Überlegungen anstellen können, die im Grunde auf Inhalte der Statistik und Stochastik zurückgreifen. Nachdem im bildungstheoretischen Konzept von Fischer (1999) als Ausgangspunkt nicht die (objektive Seite der) Mathematik gewählt wird, sondern vielmehr das Individuum und dessen Rolle in der Gesellschaft, ist es auch vor diesem Hintergrund begründbar, dem Themengebiet *Wahrscheinlichkeit und Statistik* eine entscheidende Rolle zukommen zu lassen. Dass seiner Bedeutung nicht nur im Rahmen der Reifeprüfung, sondern insbesondere auch im Unterricht Rechnung getragen werden muss, soll in den folgenden Abschnitten dargestellt werden.

Um Schülerinnen und Schülern langfristig verfügbare sinnhafte Kompetenzen auf den weiteren Lebensweg mitzugeben, sollte der Bereich *Wahrscheinlichkeit und Statistik* im Unterricht verständig und mit Leidenschaft behandelt werden, um den im Konzept zur Reifeprüfung formulierten Anforderungen gerecht zu werden: „Mathematiker/innen wie auch Anwender/innen bedienen sich häufig der Begriffe, der Darstellungsformen und der (grundlegenden) Verfahren der Beschreibenden Statistik, der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Schließenden Statistik. Für allgemeingebildete Laien wird es im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit vor allem darauf ankommen, die stochastischen Begriffe und Darstellungen im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren und deren Aussagekraft bzw. Angemessenheit einschätzen und bewerten zu können.“ (BIFIE, 2013a, S. 16)

Die folgenden Darstellungen orientieren sich nicht nur an der für die Konzeption der standardisierten kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung bedeutenden bildungstheoretischen Orientierung, sie folgen im Wesentlichen auch der im Konzept (BIFIE, 2013a) getroffenen Gliederung:

- Beschreibende Statistik
- Wahrscheinlichkeitsrechnung und -verteilung(en)
- Schließende Statistik

Es sei dabei noch einmal deutlich hervorgehoben, dass die im Konzept formulierten Grundkompetenzen eine echte Teilmenge des Lehrplans sind. Im Unterricht darf somit nicht ausschließlich und schwerpunktmäßig auf Grundkompetenzen fokussiert werden, sondern müssen darüber hinaus Aspekte aus der Wahrscheinlichkeit(srechnung) und Statistik umgesetzt werden.

Insbesondere im Lehrplan (vgl. BMUKK, 2004) finden sich darüber hinaus viele notwendige und interessante Aspekte zur Statistik und Stochastik, die in der Konzeption aus unterschiedlichen Gründen keinerlei Berücksichtigung gefunden haben. Da in Prüfungen jedoch nie alle Aspekte eines Themengebiets überprüft werden können, ist es nur allzu verständlich, dass im Unterricht weit mehr thematisiert wird, als dies in der Prüfung dann sinnvollerweise berücksichtigt werden kann. So sind die hier gewählten Beispiele prozessorientiert, um die notwendigen (Grund-)Kompetenzen auszubilden. Durch allfällige Adaptionen können daraus interessante Prüfungsaufgaben erstellt werden.

2.6.1 Beschreibende Statistik

In der bildungstheoretischen Orientierung zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung findet sich zu diesem Themenbereich folgender Absatz:

„Die eigenständige Erstellung von statistischen Tabellen und Grafiken wird sich auf Situationen geringer Komplexität und auf einfache Grafiken beschränken (z. B. bei der Kommunikation mit der Allgemeinheit), für die Ermittlung statistischer Kennzahlen (Zentral- und Streuungsmaße) gilt Ähnliches.“ (BIFIE, 2013a, S. 16)

Statistik als wiederkehrendes Thema – auch in der Oberstufe

Das Themengebiet der Beschreibenden Statistik wird gerne ausschließlich der Sekundarstufe I zugeordnet. Wegen der (prominenten) Berücksichtigung in den Bildungsstandards Mathematik 8. Schulstufe verwundert diese Tatsache zunächst kaum.

Gerade weil dieses Thema dort so dargestellt ist, eine entsprechende Durchlässigkeit gegeben sein muss und man als Lehrende/r im Unterricht angehalten ist, fachdidaktische Prinzipien, z. B. das Spiralprinzip (das heißt, wiederkehrende Inhalte auf höherem Niveau in geeigneter Weise zu thematisieren), zu berücksichtigen, ist es nur zu verständlich, dass die Beschreibende Statistik auch in der Sekundarstufe II ausreichend behandelt wird. Die Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen und Experten (als abstrakter Begriff für z. B. Tageszeitungen) kann durch die Berücksichtigung von entsprechend unterschiedlichen Darstellungsformen adressiert werden.

Obwohl die Beschreibende Statistik in vielen Bereichen des täglichen Lebens – sowohl im Alltag als auch in der Wissenschaft – auffindbar ist und sogar von mathematischen Laien sehr oft eingesetzt wird, wird sie in der Umsetzung in der Sekundarstufe II oftmals nicht ausreichend intensiv behandelt. Dies mag unter Umständen auf die Einfachheit der vorliegenden Thematik zurückzuführen sein (vgl. Peschek, 1998, S. 134).

Vor dem Hintergrund vielfältiger Kontextfelder gibt es aber auch Meinungen, dass dieses Themengebiet zu komplex und umfangreich ist. Dieser Standpunkt ist insofern nachvollziehbar, als der kritische Umgang mit unterschiedlichen Grafiken bzw. deren Interpretation für Schüler/innen in gleicher Weise wie für Lehrer/innen hohe Ansprüche darstellen – gerade wenn kontextbasierte Daten für ein eher unbekanntes Wissensfeld vorliegen. Hier hat man dann eher motivationale Probleme, um diesen Bereich im Unterricht entsprechend intensiv abzuhandeln.

Mathematik(unterricht) ist jedoch ein „Wechselspiel zwischen Darstellen, Interpretieren und Operieren“ (vgl. Peschek, 1998, S. 134 nach Fischer & Malle, 1985, S. 221). Klassischer Mathematikunterricht hat oftmals noch immer einen stark operativ geprägten Charakter. Die Beschreibende Statistik kann in diesem Zusammenhang als Chance wahrgenommen werden, Darstellen und Interpretieren im Unterricht stärker zu betonen (vgl. Peschek, 1998).

Durch die Berücksichtigung technologischer Hilfsmittel (z. B. Tabellenkalkulation) können im Unterricht auch andere Schwerpunkte – Interpretieren, Argumentieren, Kommunikationsfähigkeit, Modellieren etc. – betont werden. Somit kommt der Beschreibenden Statistik auch ein entsprechender Stellenwert im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II zu. Das folgende Beispiel in Eichler & Vogel (2009, S. 31) stellt die genannten Charakteristika anschaulich dar:

Schokolinsen

Viele von Euch haben sicherlich schon des Öfteren eine Tüte Schokolinsen gegessen. Vielleicht ist Euch dabei schon aufgefallen, dass die Inhalte der einzelnen Tüten fast nie ganz übereinstimmen – die Farben sind meist unterschiedlich häufig vertreten.

Untersucht die Inhalte dieser Tüten!

(Eichler & Vogel, 2009, S. 31)

Daten erheben, ordnen ... und Modelle bilden

In diesem Beispiel müssen die Schüler/innen Daten erheben, ordnen, darstellen, kumulieren, vergleichen, ein Modell konstruieren und dieses simulieren bzw. bearbeiten. Weiters können Hypothesen gebildet, ein formaler, also ein allgemeiner Zugang zum Modell formuliert werden oder eine Modellvalidation erfolgen.

Die Ausbildung von Grundkompetenzen, die im Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung im Bereich der Statistik zu finden sind, kann an diesem Beispiel deutlich gemacht werden. Zunächst können aus einer grafischen Darstellung entsprechende Werte abgelesen und diese ggf. sogar im Klassenkontext verglichen werden. Hier ist insbesondere auf eine geeignete Darstellung wie auch auf die Interpretation der Ergebnisse im Zusammenhang zu achten.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, dass die Schüler/innen aktiv mit Schokolinsen-Tütchen arbeiten und selbst eine Darstellungsform auswählen, die eine geeignete Interpretation des vorliegenden Sachverhalts zulässt. Durch die Untersuchung mehrerer Tütchen wird es möglich, die Problematik statistischer Kennzahlen aufzugreifen (vgl. Wagner, 2006, S. 124) und anhand konkreter Kontexte zu schärfen. Die Schüler/innen lernen durch diese selbsttätige Arbeitsform einen kritischen Umgang mit dem vorgegebenen Kontext kennen und werden zum ständigen Reflektieren und Interpretieren ihrer Ergebnisse angehalten, ohne explizit operativ (und algorithmisch) arbeiten zu müssen. Auf diese Weise werden Kompetenzen ausgebildet, wie sie im täglichen Umgang mit Datensätzen immer wieder anzutreffen sind, und es wird ein kritischer Umgang mit (größeren) Datensätzen ausgebildet.

Ein zusätzlicher Mehrwert einer solchen quasi-empirischen Untersuchung kann durch einen problem- bzw. anwendungsorientierten Ansatz deutlich gemacht werden. Anhand der folgenden Tabelle soll gezeigt werden, wie die in diesem Beispiel identifizierbaren Grundkompetenzen ausgebildet werden könnten. Die Grundkompetenz WS 1.1 wird bei Durchführung des Beispiels nicht explizit angesprochen, jedoch könnte diese mit den Schülerinnen und Schülern durch einen „Rückgriff“ auf die Grundkompetenz WS 1.2 besprochen werden.

Grundkompetenz (nach BIFIE, 2013a)		**mögliche Tätigkeiten zum Ausbilden der Grundkompetenz**
WS 1.2	Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können	Die Schüler/innen erarbeiten sich anhand einer vorhandenen Schokolinsen-Tüte selbst geeignete Grafiken und vergleichen ihr Ergebnis mit dem ihrer Klassenkolleginnen und -kollegen; hierbei werden vermutlich unterschiedliche Darstellungen des Sachverhalts entstehen, sodass in der Folge erläutert werden kann, wie diese zusammenhängen.
WS 1.3	Statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus; Quartile; Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können	Den Schülerinnen und Schülern liegt durch die von ihnen erarbeiteten statistischen Darstellungen eine Vielzahl von Daten vor. Sie sollten in der Lage sein, auf dieser Basis die in WS 1.3 angeführten statistischen Kennzahlen zu ermitteln und im Kontext kritisch zu deuten.
WS 1.4	Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können	Durch die kritische Reflexion und Interpretation der erhobenen Daten wird für die Schüler/innen deutlich, dass eine Begründung notwendig wird, hebt man eine Kennzahl explizit hervor.

2.6.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung und -verteilung(en)

In der bildungstheoretischen Orientierung zur standardisierten kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung finden sich zu diesem Themenbereich folgende Absätze:

„Auch bei der Wahrscheinlichkeit kann man sich auf grundlegende Wahrscheinlichkeitsinterpretationen, auf grundlegende Begriffe (Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Dichte- und Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz/Standardabweichung) und Konzepte (Binomialverteilung, Normalverteilung) sowie einfachste Wahrscheinlichkeitsberechnungen beschränken; wichtig hingegen erscheint es, Wahrscheinlichkeit als eine (vom jeweiligen Informationsstand) abhängige Modellierung und Quantifizierung des Zufalls sowie als unverzichtbares Bindeglied zwischen den beiden Statistiken zu verstehen.

Der Begriff der (Zufalls-)Stichprobe ist bereits bei der Wahrscheinlichkeit, aber natürlich auch in der Schließenden Statistik grundlegend und zentral.“ (BIFIE, 2013a, S. 16)

Wahrscheinlichkeit als Bindeglied zwischen Beschreibender und Schließender Statistik

Neben der Überleitung in das noch zu thematisierende Gebiet der Schließenden Statistik beinhalten diese Ausführungen für den Unterricht wesentliche Ansätze. Der Wahrscheinlichkeitsrechnung und -verteilung wird im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II innerhalb des Inhaltsbereichs *Statistik und Wahrscheinlichkeit* die meiste Aufmerksamkeit geschenkt (vgl. Peschek, 2000). Werner Peschek erläutert die damit verbundene Problematik:

„Was Lernenden (wie auch Lehrenden) dabei den Zugang zu zentralen Ideen der Wahrscheinlichkeitstheorie beträchtlich erschweren kann, ist die an vielen einführenden Lehrbüchern nachvollziehbare Beobachtung,

- dass grundlegende Begriffe (wie Ergebnis, Ereignis, Elementarereignis, Ergebnis- bzw. Ereignisraum, Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Verteilungsfunktion etc.) oft sehr formalistisch-exakt eingeführt werden, obwohl diese Begriffe später gar nicht mehr, nicht in dieser Exaktheit oder überhaupt in ganz anderer Form benötigt werden;
- dass nicht selten unverständliche, gelegentlich auch falsche Erklärungen verwendet werden [...]
- dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung oft wie ein Fremdkörper zwischen den beiden Statistiken steht und nicht adäquat auf die schließende Statistik vorbereitet.“

(Peschek, 2000, S. 151)

Um dieser Kritik begegnen zu können, muss der Unterricht in einer Weise gestaltet werden, die es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, die entsprechenden Grundlagen nachhaltig zu nutzen.

Zum grundlegenden Verständnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört die verständige Verwendung der Begrifflichkeiten *absolute Häufigkeit*, *relative Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit von Zufallsexperimenten*. Die Erarbeitung der notwendigen Begrifflichkeiten wird von jeder Lehrkraft selbst zu beurteilen sein, im Wesentlichen bieten sich jedoch zwei Zugänge an: ein spielerisch-experimenteller und ein formal-analytischer.

Auch in diesem Themenbereich ist die Berücksichtigung der bildungstheoretischen Orientierung des Reifeprüfungskonzepts von entscheidender Bedeutung, insbesondere der Ansatz der Kommunikation mit Expertinnen und Experten. Vor diesem Hintergrund erscheint der formal-analytische Zugang zunächst nicht als der offensichtliche(re).

Es sollte sich im Prozess des Unterrichts aus einem spielerisch-experimentellen Zugang ein formal-analytisches Verständnis, das ggf. in der entsprechenden Definition der Begrifflichkeiten mündet, entwickeln. Ein solches Beispiel findet sich etwa in den SINUS-Materialien:

Der etwas andere Münzwurf

Ich biete dir folgendes Spiel an: Du wirfst eine 2-Cent-Münze, so dass sie auf einem Raster aus Quadraten landet, zum Beispiel auf einem Schachbrett (siehe Bild). Die Quadrate haben die Seitenlänge 3 cm.

Wenn deine Münze so auf dem Raster liegen bleibt, dass sie keine Linie berührt, gewinnst du 50 Cent. Berührt sie eine Linie, bekomme ich von dir 10 Cent.

Spielst du mit?

(nach Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, o. J.)

Auch in diesem Beispiel können Grundkompetenzen identifiziert werden. Es sind dabei wiederum nicht alle Grundkompetenzen aus dem Teilbereich *Wahrscheinlichkeitsrechnung* enthalten:

Grundkompetenz (nach BIFIE, 2013a)		**mögliche Tätigkeiten zum Ausbilden der Grundkompetenz**
WS 2.1	Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können	Die Schüler/innen müssen sich im Klaren sein, was es heißt, bei diesem Spiel zu gewinnen. Das Ereignis selbst ist in der Angabe bereits ausführlich beschrieben, die Angabe des Grundraums erfolgt nicht, wie bei Münzen üblich, mit Kopf oder Zahl, sondern mit G = {berührt, berührt nicht}.
WS 2.2	Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können	Durch fortgesetztes Probieren erhalten die Schüler/innen ein Gefühl dafür, was gefordert ist. Durch das Vernetzen von Verfahren und Begriffen kann so der Begriff der Wahrscheinlichkeit anhand eines konkreten Beispiels im Zusammenhang mit dem Begriff der relativen Häufigkeit erarbeitet werden.
WS 2.3	Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können	Die Schüler/innen sollen in diesem Beispiel die Gewinnwahrscheinlichkeit ermitteln. Dies erfolgt hier unter der Laplace-Annahme. Weitere Interpretationen gehen damit einher, z. B. die Beantwortung der Frage, warum an diesem Spiel teilgenommen werden soll.

moderne Technologie als Hilfsmittel, um den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und Statistik herzustellen

Auf dieses Beispiel aufbauend kann durch einen intuitiven Zugang die Verteilungsfunktion ermittelt werden. Der Einsatz von Technologie kann bei diesem unterrichtlichen Zugang zu einem vertieften Verständnis des vorliegenden Sachverhalts führen. Der Einsatz moderner Technologie ermöglicht es insbesondere, den Zusammenhang von Statistik und Wahrscheinlichkeit herzustellen, sodass auch Überlegungen hinsichtlich der Stichprobengröße bzw. der Abhängigkeit von dieser Größe anschaulich gemacht und anschließende Überlegungen zur Verteilung angestellt werden können. Ein solches Beispiel stammt von Reinhard Schmidt und Andreas Lindner (http://www.geogebratube.org/student/m4948 [05.09.2013]):

Würfeln und relative Häufigkeit

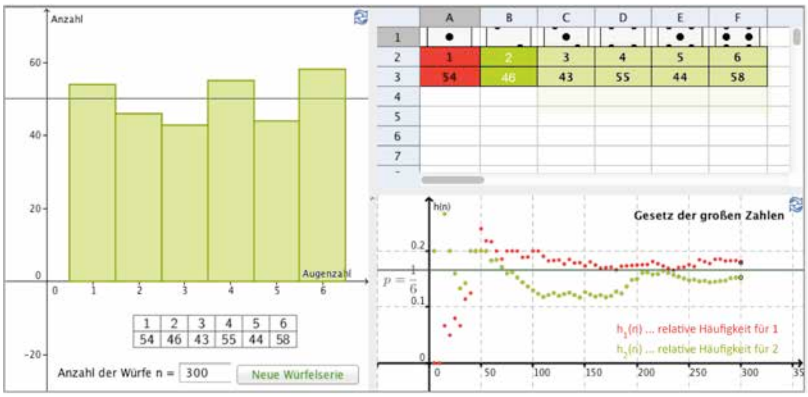
Dieses Applet zeigt eine Simulation für das n-malige Werfen eines Würfels.

Wird ein Zufallsexperiment unter den gleichen Bedingungen n-mal wiederholt und tritt dabei ein bestimmtes Ereignis E genau k-mal auf, so nennt man

$$h_n(E) = \frac{k}{n}$$

die relative Häufigkeit des Ereignisses E.

Im Applet wird die relative Häufigkeit h_n für die Augenzahl 1 bzw. 2 ermittelt und in einem Diagramm dargestellt.



Durch solche vorgegebenen Simulationen können geforderte Begriffe wie *Zufallsvariable*, *(Wahrscheinlichkeits-)Verteilung*, *Erwartungswert*, *Binomialverteilung* und *Normalapproximation* verständig und anschaulich erlernt werden. Dass diese auch im Alltag immer wieder auftreten, muss – etwa durch entsprechende Zeitungs- oder Nachrichtenmeldungen – bewusst in Erinnerung gerufen werden (vgl. Peschek, 2000, S. 152).

Durch die Orientierung an solchen oder ähnlichen Beispielen wird es gelingen, den Schülerinnen und Schülern die formal-analytischen Aspekte in der Wahrscheinlichkeitsrechnung näher zu bringen, ohne stark innermathematisch arbeiten zu müssen.

Möchte man ohne den Zugang zu Glückspielen auf einen ausschließlich anwendungsorientierten Zugang zurückgreifen, bietet Werner Peschek in seinem im Jahr 2000 publizierten Aufsatz *Was kann man von „pflichtbewussten" Stichproben erwarten? Wahrscheinlichkeitsrechnung im Dienste angewandter Statistik* zahlreiche hilfreiche Anregungen. Legt man hingegen auf einen gemischten, auch auf Schulbuchaufgaben ausgearbeiteten Aufgabenpool wert, bietet die Webseite http://kompetenzen.pbworks.com/w/page/50868492/Wahrscheinlichkeit%20und%20Statistik [20.08.2013] wertvolle Informationen.

Die Berücksichtigung der bildungstheoretischen Orientierung des Reifeprüfungskonzepts unterstützt den Ansatz, bei der Vermittlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung Zusammenhänge zu verwandten Themengebieten zu fokussieren und diese nicht beziehungslos zueinander zu unterrichten (vgl. Schupp, 1982, S. 214). Der von Schupp geäußerten Kritik, verwandte Themenkomplexe würden im Mathematikunterricht nicht ausreichend vernetzt, kann auf diese Weise entgegengewirkt werden. Der vom Autor formulierte Leitsatz hat nach wie vor seine Berechtigung: „Statistik ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung ist blind [...], Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Statistik ist leer“ (vgl. Schupp, 1982, S. 210).

2.6.3 Schließende Statistik

In der bildungstheoretischen Orientierung zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung findet sich zu diesem Themenbereich folgender Absatz:

„Von den zwei grundlegenden Konzepten der Schließenden Statistik, dem Testen von Hypothesen und der Hochrechnung (Konfidenzintervall), ist die Hochrechnung von besonderer Bedeutung. Im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit wird es auch hier weniger darum gehen, Konfidenzintervalle zu ermitteln, sondern vorrangig darum, Ergebnisse dieses Verfahrens im jeweiligen Kontext angemessen zu deuten und zu bewerten. Dabei spielen Begriffe wie Sicherheit/Irrtumswahrscheinlichkeit und deren Zusammenhang mit der Intervallbreite („Genauigkeit“) und dem Stichprobenumfang eine zentrale Rolle, sodass entsprechende Kompetenzen unverzichtbar sind.“ (BIFIE, 2013a, S. 16)

Der Schließenden Statistik kommt im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II aus unterschiedlichen Gründen eine eher untergeordnete Rolle zu, obgleich sie eine zentrale Rolle bei Phänomenen bzw. Ereignissen des täglichen Lebens inne hat. Gleichzeitig existiert ein mathematisches Konzept, mit dem Behauptungen durch ein elaboriertes und standardisiertes Verfahren untersucht werden können.

Untersuchungen von Hypothesen wurden jeder/jedem von uns bereits präsentiert – beispielsweise bei Landtagswahlen, Meinungsumfragen etc. Der gesellschaftliche Nutzen dieses Themengebiets ist unumstritten, da er jedenfalls immer wieder zu beobachten ist. Hier hat man also eine unmittelbar vorliegende Antwort auf die im Rahmen der bildungstheoretischen Orientierung des Reifeprüfungskonzepts aufgeworfene Frage: Wie viel und welche Mathematik benötigt ein/e Maturant/in?

Die Schüler/innen sollen sensibilisiert werden zu erkennen, dass Datenerhebung (wie im Beispiel *Schokolinsen* beschrieben) nicht Mittel zum (Selbst-)Zweck ist, sondern im Sinne der Heymann’schen Idee der Weltorientierung (vgl. Heymann, 1996, S. 79–88) enormes Potenzial für das Verstehen der Welt durch Mathematik besitzt.

Durch einfache Adaption des Beispiels *Schokolinsen* gelingt es, ein für die Schüler/innen interessantes Beispiel zur Schließenden Statistik zu erzeugen:

Schokolinsen

„Warum sind von den Roten eigentlich immer so wenig drin?“

Stellt anhand einer Untersuchung einiger Schokolinsen-Packungen eine Hypothese zur Häufigkeit der einzelnen Farben – insbesondere der roten Linsen – auf und überprüft Eure Prognose.

(Eichler & Vogel, 2009, S. 159)

Diese oder ähnliche Schülerinnen und Schülern zur Bearbeitung vorgelegte Problemstellungen sorgen für vielfältige Kommunikationsanlässe. Die Variabilität des stochastischen Denkens wird auf diese Weise nicht nur gefördert, sondern auch gefordert.

Verständnisfragen zur Alltagstauglichkeit können anhand solcher Beispiele ausführlich besprochen werden. Dabei soll herausgearbeitet bzw. erkannt werden, wie eine Erweiterung der Datenanalyse im Sinne eines genetischen Unterrichtskonzepts ablaufen muss: Zunächst erfolgt eine Datenanalyse als Vorbereitung der Prognose, danach wird eine Prognose bzw. Hypothese formuliert und überprüft. Dazu sind entsprechende Vorkenntnisse aus dem Bereich der Beschreibenden Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie ggf. Kenntnisse zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen notwendig. Die Validierung wird wieder mit Mitteln der Beurteilenden Statistik erfolgen (vgl. Eichler & Vogel, 2009, S. 163).

2.6.4 Prüfungsaufgaben

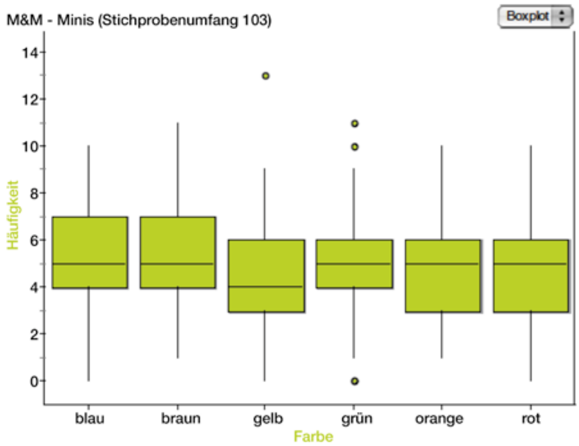
Jede/r Lehrende ist aufgrund ihrer/seiner Ausbildung und insbesondere aufgrund ihres/seines Dienstauftrags verpflichtet, diagnostisch tätig zu sein. Diese diagnostischen Tätigkeiten, die im Unterrichtsgeschehen verortet sind – Schularbeiten, ggf. Wiederholungen – werden oftmals unterschätzt, obwohl ihnen eine wichtige Aufgabe zukommt. Sie geben Schülerinnen und Schülern nicht nur eine leistungsbezogene Rückmeldung, sondern zeigen auch, wie weit der Stoff von den Lernenden verinnerlicht wurde. Diagnostische Tätigkeiten stellen also in gleicher Weise eine Rückmeldung für die Lehrende/den Lehrenden über die Qualität ihrer/seiner Bemühungen dar.

Typ-1-Aufgaben fokussieren in einer sehr isolierten und atomisierten Weise auf vorgegebene Grundkompetenzen. Obwohl Unterrichtsaufgaben, wie sie in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellt wurden, diese Grundkompetenzen vorbereiten können, sind sie in dieser Form nicht unbedingt geeignet, in Prüfungen verwendet zu werden – schon gar nicht, wenn zu ihrer Bearbeitung Materialien benötigt werden (wie etwa bei den Schokolinsen-Aufgaben).

Man kann aber durchaus Ergebnisse oder Teile solcher Aufgaben verwenden, um im Rahmen selbst erstellter Prüfungsaufgaben auf das behandelte Stoffgebiet einzugehen. So würde sich vor dem Hintergrund der Schokolinsen-Problemstellung anbieten, in einer Prüfungsaufgabe vorhandene/identifizierte Grundkompetenzen in einer ähnlichen Situation abzuprüfen. Eine Aufgabe, die auf die Grundkompetenz WS 1.1 abzielt und einen solchen Hintergrund hat, könnte wie folgt lauten:

Schokolinsen

Gegeben ist folgende Boxplot-Darstellung:



(vgl. Eichler & Vogel, 2012)

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Im Durchschnitt sind weniger gelbe Schokolinsen in den Tüten vorhanden.	☐
Die Spannweite der braunen Schokolinsen beträgt 6.	☐
Der Median der grünen Schokolinsen beträgt 4.	☐
Das 1. Quartil der orangefarbigen Schokolinsen lautet 3.	☐
Im Durchschnitt sind immer gleich viele Schokolinsen in den Tüten enthalten.	☐

Obwohl es sicherlich nicht immer gelingen wird, aus solchen Problemstellungen gute Prüfungsaufgaben zu generieren oder geeignete Ideen zu finden, zeigt dieses Beispiel, dass es möglich ist, aus vorhandenen Unterrichtsaufgaben kompetenzbasierte Prüfungsaufgaben zu generieren. Dies ist auch bei Typ-2-Aufgaben möglich, wenngleich diese aufgrund ihrer Ausrichtung deutlich umfangreicher sind. Bei diesem Aufgabentyp wird auch ein entsprechend hoher Reflexionsanteil erwartet. Solche Prüfungsaufgaben müssen in gleicher Weise auf die formulierten Grundkompetenzen Bezug nehmen.

Unterscheidung zwischen Unterrichts- und Prüfungsaufgaben

Den Schülerinnen und Schülern kann beispielsweise eine Problemstellung wie die folgende zur Bearbeitung vorgelegt werden:

Zufallsgröße *X*

Über eine Zufallsgröße X liegen widersprüchliche Wahrscheinlichkeitsaussagen vor. Einigen Aussagen zufolge müsste die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Abbildung 1 entsprechen, anderen Aussagen zufolge der Abbildung 2.

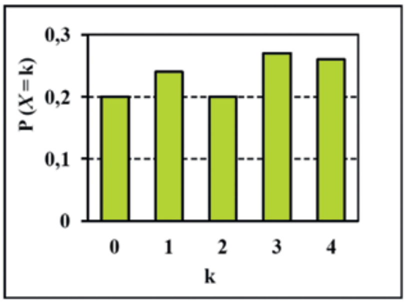


Abbildung 1

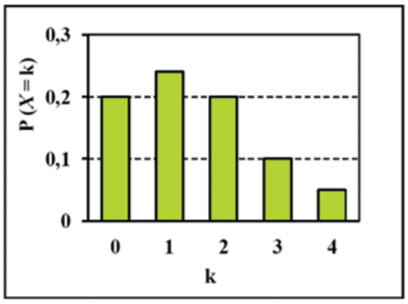


Abbildung 2

Aufgabenstellung:

a) Begründen Sie, warum keine der beiden Abbildungen die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X wiedergeben kann!

b) Eine gründliche Neuuntersuchung der Zufallsgröße X liefert folgende Erkenntnisse:

$P(X = 0) = 0{,}20$; $P(X = 1) = 0{,}24$; $P(X = 2) = 0{,}20$

Die Zufallsvariable X kann ganzzahlige Werte von 0 bis 4 annehmen. Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X beträgt 1,94.

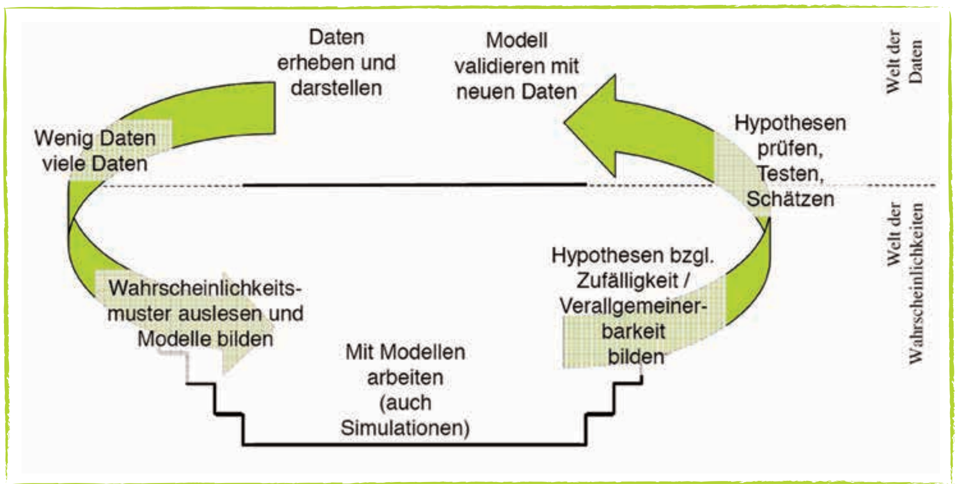
Bestimmen Sie $P(X = 3)$ und $P(X = 4)$!

(vgl. Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus et al., 2012, S. 7)

Hier müssen die Schüler/innen nicht nur vernetzt arbeiten und Bezüge innerhalb des Themengebiets herstellen können, sie müssen in gleicher Weise auch über vorgegebene Bezüge reflektieren, dabei einen verständigen Umgang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik an den Tag legen und diesen in der Folge verständlich formulieren können.

2.6.5 Fazit

Gelingt im Unterricht die nachhaltige Vermittlung der im Inhaltsbereich *Wahrscheinlichkeit und Statistik* enthaltenen mathematischen Kompetenzen, bedeutet dies – aus fachdidaktischer Perspektive – einen echten Wandel. Dabei wird ersichtlich werden, dass die vorliegende Schnittstellenproblematik Sekundarstufe I > Sekundarstufe II von den Lehrenden stärker als bisher thematisiert werden muss. Den Schülerinnen und Schülern sollte deutlich gemacht werden, dass das in diesem Inhaltsbereich erworbene Wissen für spätere zu erlernende Inhalte in hohem Maß relevant sein kann. Zudem können bei entsprechender Gestaltung des Unterrichts – einige exemplarische Anregungen wurden in den vorangegangenen Abschnitten formuliert – nicht nur (Grund-)Kompetenzen ausgebildet, sondern insbesondere auch über die Mathematik hinausgehende Kompetenzen erzeugt werden, die in unmittelbarem Zusammenhang zur vorhandenen (aber doch subjektiv empfundenen) Realität stehen. Dies soll durch die folgende Abbildung (vgl. Eichler & Vogel, 2013, S. 30) deutlich gemacht werden:



Durch das Aufgreifen der im Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik formulierten bildungstheoretischen Orientierung kann dieser abgebildete Kreislauf im Unterricht genau in dieser Form umgesetzt werden, ohne darauf explizit einzugehen. Er stellt somit ein didaktisches Hilfsmittel für Lehrer/innen dar, um sich immer wieder bewusst zu machen, welche Aspekte es im Unterricht zu betonen gilt, welche (Grund-)Kompetenzen auszubilden und welche Mathematik dazu jedenfalls erlernt werden muss. Durch diese Orientierung wird es gelingen, die anfangs dargestellte Frage „Wie viel Mathematik und welche Mathematik sollen Heranwachsende zu ihrem eigenen Nutzen und zum Nutzen unserer Gesellschaft lernen?“ in einer befriedigenden Form zu beantworten und den Mathematikunterricht an neuen und modernen Ideen, Konzepten und Vorgaben auszurichten, sodass auch zukünftige Schülergenerationen das Erlernen mathematisch fundierter Inhalte mit Spannung und Spaß erleben.

2.7 Tipps aus der Schulpraxis

Ich halte es für ganz wichtig, dass unsere Schüler/innen die Grundkompetenzen, die Aufgabenformate für Teil 1 und Teil 2, den Kontextkatalog und das Beurteilungsmodell gut kennen. Jede Schülerin/jeder Schüler sollte den Link https://www.bifie.at/node/1442 kennen. Das liegt in der Verantwortung der Lehrer/innen.

Den Schülerinnen und Schülern muss klar sein, dass sie selbst die Verantwortung dafür tragen, die geforderten Grundkompetenzen zu kennen und zu beherrschen, und dass die/der Lehrende sie beim Erwerb dieser Kompetenzen nur unterstützen kann.

Diese Unterstützung muss im Unterricht durch die Beschäftigung mit den Grundkompetenzen, mit den Aufgabenformaten und mit dem Kontextkatalog erfolgen. Schularbeiten müssen in Inhalt, Format und Bewertung auf die Matura vorbereiten.

Helmut Lambauer

Nach Duit und Stadelmann sind für Lernprozesse – und damit nachhaltiges Lernen – Lernumgebungen notwendig, in denen Schülerinnen und Schülern Gelegenheiten geboten werden, sinnvoll und selbstbestimmt zu arbeiten, unabhängig von der Lehrperson und anderen Schülerinnen und Schülern zu denken und es möglich ist, zu interagieren, Bedeutungen auszuhandeln und zu diskutieren. Im Unterricht ist somit darauf zu achten, dass es immer wieder Phasen gibt, in denen sich die Lernenden austauschen, über (und mit) Mathematik sprechen und ihre Vorstellungen und Modelle artikulieren können. Freiarbeitsphasen, in denen sich die Lernenden selbst organisieren, Aufgaben verschiedenster Art bearbeiten und die Ergebnisse präsentieren können, sind unerlässlich. Die dafür notwendigen und geeigneten Aufgabenstellungen sind von der Lehrperson gezielt auszuwählen.

Heiner Juen

Beim Lernen dürfen auch Fehler gemacht werden – das Erkennen von Fehlern hilft auch beim Erkennen der Distraktoren bei Multiple-Choice-Aufgaben.

Beim Üben von Aufgaben zu den Grundkompetenzen erhalten die Lernenden immer wieder den Auftrag, in Kleingruppen selbstständig Typ-1-Aufgaben zu entwickeln. Dabei üben sie sich im exakten Formulieren von Aufgabenstellungen und Behauptungen. Sie stellen fest, dass die Suche nach geeigneten Distraktoren einfacher wird, wenn man im Unterricht auch den Umgang mit Fehlern gelernt hat: „Fehler dürfen gemacht werden – aus Fehlern kann man lernen!“

Christa Preis

Einige Tipps:

- Schüler/innen genau über die Grundkompetenzen informieren
- Schularbeitsstoff teilweise über Bezeichnungen wie AG 2.1 angeben
- Referate zu einzelnen Grundkompetenzen vergeben
- Schüler/innen zu einzelnen Aufgabenformaten selbst Aufgabenstellungen finden lassen
- Grundkompetenzen ausreichend wiederholen, dabei planvoll vorgehen (Hausübungen, Schularbeiten, Lernzielkontrollen)
- vorhandene Materialien nutzen (Aufgabenpool, Kompetenzchecks)
- wiederholter Blick auf die Website des BIFIE

Walter Mayer

Bei der neuen Reifeprüfung werden die Kandidatinnen und Kandidaten mit Aufgaben konfrontiert, die für sie zum Teil neu und hinsichtlich ihrer Formulierung ungewohnt sind. Um Ihre Schüler/innen optimal auf die gestellten Anforderungen vorzubereiten, ist es wichtig, dass Sie im Unterricht und auch bei Leistungsfeststellungen Aufgaben einsetzen, die von anderen Kolleginnen und Kollegen erstellt wurden. Nutzen Sie deshalb alle Möglichkeiten, sich mit Kolleginnen und Kollegen auszutauschen und so eine möglichst große Vielfalt an Aufgaben zur Verfügung zu haben.

Robert Pitzl

Folgender Link ist mir bei der Weitergabe an Kolleginnen und Kollegen im Rahmen von Seminaren besonders positiv rückgemeldet worden: http://www.imathas.com/stattools. Mit diesen Hilfsmitteln können Lehrer/innen und Schüler/innen auf einfache Weise sehr schöne Boxplots erstellen.

Paul Schranz

Meine Tipps für die Vorbereitung zur neuen Reifeprüfung in Mathematik neben dem Arbeiten mit den entsprechenden Aufgabenformaten:

- Lesen, Lesen, Lesen
- Üben, den Sinn von Gelesenem mit mathematischen Inhalten zu erfassen
- Trainieren, für die Aufgabenstellung Wichtiges von nicht Relevantem zu unterscheiden

Wikipedia stellt hierfür eine hervorragende Quelle dar.

Andrea Ferlin

Tipps und Tricks

- „Kopfübungen“ (Regina Bruder) zum Wachhalten von grundlegenden, weiter zurückliegenden Lernstoffen (idealerweise alle 14 Tage am Beginn einer Stunde (Dauer 5 bis 10 Minuten) in Form einer PowerPoint-Präsentation)
- differenzierte Aufgabenangebote, die sicherstellen, dass alle Schüler/innen ihrem Lernfortschritt entsprechend üben können
- weniger Übungsaufgaben auswählen – dafür solche, die mehrere Lösungswege ermöglichen (die dann ausführlich besprochen und verglichen werden)
- vermehrter Einsatz kooperativer Lernformen, damit sich möglichst alle Schüle-r/innen aktiv am Lernprozess beteiligen
- bei Schularbeiten auch weiter Zurückliegendes prüfen, das heißt, der Schularbeitsstoff soll auch Inhalte der vorangegangenen Schularbeiten (bzw. sogar Jahrgänge) beinhalten

Gottfried Gurtner

Durch meine Tätigkeiten wurde ich recht früh in die geplanten Änderungen eingebunden. Ich habe mich den neuen Vorstellungen positiv zugewandt und glaube, dass dies Einfluss auf meinen Unterricht genommen hat. Bereits in der Unterstufe setze ich die vorgeschlagenen Aufgabenformate ein – sie werden so zur Selbstverständlichkeit.

Die Suche nach neuen Aufgaben hat mich gezwungen, mich wieder vermehrt mit diesen zu beschäftigen und über deren Einsatz nachzudenken. Dabei habe ich begonnen, einiges an meinem Unterricht zu ändern. Die Definition der Grundkompetenzen ist sicher nicht ganz in meinem Sinn ausgefallen; dennoch fühle ich mich verpflichtet, besonders darauf einzugehen, weil ich – wie letztendlich wir alle – an der Ausbildung der Jugendlichen interessiert bin.

Die ständige Befassung mit den Grundlagen fordert nicht nur, sondern fördert auch die Weiterentwicklung. Die punktuelle Befassung mit Lehrinhalten zu bestimmten Schwerpunktthemen, insbesondere in Prüfungssituationen, weicht zurück. Die Grundlagen sind immer gegenwärtig und stabilisieren das mathematische Wissen. Verstärken kann man dieses Bestreben durch eine Auswahl von Aufgaben, die den Einsatz der Mathematik betonen und bei entsprechender Aufarbeitung keine Hürden sind.

Vielleicht schaffen wir es so gemeinsam, die Mathematik als Grundlage einer höheren Ausbildung wieder ins rechte Licht zu rücken. Zeigen wir auf, dass es ohne Mathematik einfach nicht geht!

Eduard Engler

Regelmäßige Grundkompetenzchecks (etwa alle 14 Tage) mit Betonung der Grundkompetenzen des aktuellen Lerninhalts, aber auch unter Berücksichtigung weiter zurückliegender, zum aktuellen Inhalt passender Grundkompetenzen:

LBVO § 4: In die Unterrichtsarbeit eingebundene mündliche, schriftliche und graphische Leistung

Auswertung:

- Partnerarbeit oder sonstige Methoden gegenseitiger Kontrolle (z. B. „zufällige Mischung“); dabei wird den Schülerinnen und Schülern eine Lösungserwartung analog zur Korrektur der standardisierten Reifeprüfung zur Verfügung gestellt
- oder: Auswertung durch die Lehrerin/den Lehrer (unbedingt mit Feedback)
- oder: Grundkompetenzencheck am Computer mit Auswertung durch den Computer (Beispiele aus der Sekundarstufe I gibt es)

Helmut Heugl

Das eigene verständnisorientierte Lernen muss in den Mittelpunkt rücken – dafür brauchen die Lernenden aber Zeit zum Nachdenken, zum Ausprobieren verschiedener Lösungswege und für den Austausch mit den Mitschülerinnen und Mitschülern. Das gegenseitige Erklären von Lösungsstrategien hilft bei der Entwicklung der Problemlösekompetenz.

Michaela Kraker

Die Aufgaben der schriftlichen Reifeprüfung sind stark am Basiswissen orientiert und fokussieren im Wesentlichen auf die Grundkompetenzen – eigentlich sind die Beispiele also nicht schwer, wenn die Grundkenntnisse gefestigt und jederzeit verfügbar sind. Die geforderte Nachhaltigkeit des Erlernten kann durch verständiges Lernen und oftmaliges Wiederholen erreicht werden.

Wir bieten an unserer Schule zusätzlich eine unverbindliche Übung „Grundkompetenztraining in Mathematik" an. Dieses Angebot für die Schüler/innen der jetzigen 5. und 6. Klassen wird von vielen gerne angenommen.

Dabei ist es in einer stressfreien Lernumgebung möglich, klassenübergreifend (oder gar schulstufenübergreifend) einzelne Bereiche des Grundkompetenzkatalogs nochmals zu wiederholen, das Verständnis zu schärfen und die Aufgabenformate zu trainieren. Denn gerade auch die neue Form der Aufgaben stellt nicht nur für Schüler/innen, sondern auch für Lehrer/innen eine Herausforderung dar. Waren bisher Aufgaben im Multiple-Choice-, im Lückentext- oder im Zuordnungsformat bei Mathematikbeispielen unüblich und bei schriftlichen Prüfungen eher unerwünscht, sollen unsere Schüler/innen nun auf genau diese Art von Beispielen vorbereitet werden. In Gruppenarbeiten und offenen Lernphasen lernen sie, über vorgegebene Aussagen zu reflektieren, Lösungen auf ihre Korrektheit zu untersuchen und richtige Zusammenhänge zu erkennen.

Gerade bei diesen unverbindlichen Übungen wird der Diskussion über Aufgabenstellungen viel Zeit eingeräumt – meines Erachtens leistet das „Reden über Mathematik" einen wesentlichen Beitrag zum verständigen Lernen!

Eine Vielzahl von Beispielen, die diesen neuen Anforderungen gerecht werden, findet sich in den Schulbüchern, zahlreiche Anregungen finden sich auf der Website des BIFIE.

Also los geht's – auf Beispielsuche!
Eine zeitaufwändige, aber durchaus spannende und lohnende Aufgabe!

Gritt Steinlechner-Wallpach

3 Literatur

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus et al. (Hrsg.) (2012). *Musteraufgaben für einen hilfsmittelfreien Prüfungsteil in der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik*. Hamburg. Verfügbar unter http://www.hamburg.de/contentblob/3379290/data/mustermat1.doc [20.08.2013].

Bruder, R. (1981). Zur quantitativen Bestimmung und zum Vergleich objektiver Anforderungsstrukturen von Bestimmungsaufgaben im Mathematikunterricht. In *Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule Potsdam* 25/1, S. 173–178.

Bruder, R. (2003). *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens.* Darmstadt. Verfügbar unter http://nibis.ni.schule.de/~as-lg/Mathe2/Dokumente/probleme%20loesen.pdf [20.08.2013].

Bruder, R. (2005). *Problemlösen lernen für alle.* Darmstadt. Verfügbar unter http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienIPN/Bruder.pdf [20.08.2013].

Bruder, R. (2006). *Modul 1. Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht.* o. O. Verfügbar unter http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienBT/Bruder_Modul1.pdf [20.08.2013].

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Buchberger, B. (2003). *White-Box / Black-Box Principle etc. Vortrag beim Symposium „Mathematics and New Technologies: What to Learn, How to Teach?“*. Madrid.

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.) (2011a). *Ausgewählte Aufgabenstellungen Mathematik.* Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1522 [20.08.2013].

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.) (2011b). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe – Auf dem Wege zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1.* Graz: Leykam. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1354 [20.08.2013].

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.) (2012a). *Exemplarische Typ-2-Aufgaben Mathematik (AHS).* Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1976 [20.08.2013].

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.) (2012b). *Kompetenzcheck Mathematik (AHS) – Oktober 2012.* Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1807 [20.08.2013].

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.) (2013a). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen.* Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1442 [20.08.2013].

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.) (2013b). *Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung / Reife- und Diplomprüfung. Grundlagen – Entwicklung – Implementierung.* Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/2045.

Bühner, M. (2006). *Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion.* München: Pearson.

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur (BMUKK) (Hrsg.) (2004). *Lehrplan Mathematik Oberstufe AHS.* Verfügbar unter http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf [20.08.2013].

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur (BMUKK) (Hrsg.) (2012). *Die kompetenzorientierte Reifeprüfung im Fach Mathematik an AHS. Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben*. Wien. Verfügbar unter http://www.bmukk.gv.at/medienpool/22076/reifepruefung_ahs_lfmath.pdf [20.08.2013].

Cigler, J. (1978). *Einführung in die Differential- und Integralrechnung. 1. Teil.* Wien: Manz.

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik.* Heidelberg: Springer.

Eichler, A. & Vogel, M. (2012). *Daten und Zufall an realen Phänomenen entdecken und erfahren – ein Thema für die gesamte Schulzeit.* Freiburg. Verfügbar unter http://www.ph-heidelberg.de/wp/vogel/vogel_phheidelberg/buch_aemv/2012_mathefueralle_freiburg/mfa_2012.pdf [21.08.2013].

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Daten, Zufall und Co – zum Modellieren im Stochastikunterricht.* Köln. Verfügbar unter http://www.ph-heidelberg.de/wp/vogel/vogel_phheidelberg/buch_aemv/2013_koeln_mathe_mal_anders/Daten,%20Zufall%20und%20Co_zum%20Modellieren%20im%20Stochastikunterricht.pdf [21.08.2013].

Fischer, R. (1999). Mathematik anthropologisch: Materialisierung und Systemhaftigkeit. In Dressel, G. & Rathmayr, B. (Hrsg.). *Mensch – Gesellschaft – Wissenschaft. Versuch einer reflexiven historischen Anthropologie.* Innsbruck: Studia. S. 153–168.

Fischer, R. & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.* Mannheim: Wissenschaftsverlag.

Götz, S. & Siller, H.-S. (2012). Einige Bemerkungen zum Format von Multiple Choice-Aufgaben: eine Replik. In *Internationale Mathematische Nachrichten* 220/66. Jahrgang. S. 29–39.

Heugl, H., Klinger, W. & Lechner, J. (1996). *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen.* München: Addison-Wesley.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim: Beltz.

Institut für Didaktik der Mathematik der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt (IDM) (Hrsg.) (2007). *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe.* Klagenfurt. Verfügbar unter http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf [21.08.2013].

Institut für Didaktik der Mathematik der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt (IDM) (Hrsg.) (2009). *Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“*. Klagenfurt. Verfügbar unter http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/sRP-M_September_2009.pdf [21.08.2013].

Malle, G. (2011). *Mathematik verstehen 7*. Wien: ÖBV.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.). (o. J.) *Zentrale Lernstandserhebungen in der Jahrgangsstufe 8*. Düsseldorf. Verfügbar unter http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lernstand8/aktuelles/ [20.08.2013].

Leuders, T. (2009). *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Moosbrugger, H. & Kelava, A. (Hrsg.) (2012). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion.* Heidelberg: Springer.National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (o. J.). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston. Verfügbar unter http://www.nctm.org/standards/ [20.08.2013].

OECD (Hrsg.) (2006). *PISA Related Items – Mathematics.* Verfügbar unter http://www.oecd.org/pisa/38709418.pdf [13.09.2013].

Peschek, W. (1998). Beschreibende Statistik: Zentrale Tätigkeiten, lokale Bedeutungen, globale Ideen. In *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft.* Wien: ÖMG. S. 134–148.

Peschek, W. (2000). Was kann man von „pflichtbewussten" Stichproben erwarten? Wahrscheinlichkeitsrechnung im Dienste angewandter Statistik. In *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft.* Wien: ÖMG. S. 151–159.

Peterßen, K. (2004). *Heuristik im Mathematikunterricht.* Weingarten. Verfügbar unter http://mathematik.ph-weingarten.de/~hafenbrak/docs/Problemloesen/Problem05.pdf [20.08.2013].

Pólya, G. (1995). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme.* Tübingen: Francke.

Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie – Testkonstruktion.* Bern: Huber.

Schmidt, G. (1997). *Experimentieren, Entdecken, Modellieren und Veranschaulichen mit dem TI-92.* Freilassing: Texas Instruments.

Schupp, H. (1982). Zum Verhältnis statistischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer Komponenten im Stochastik-Unterricht der Sekundarstufe I. In *Journal für Mathematik-Didaktik* 3/4. S. 207–226.

Wagner, A. (2006). Entwicklung und Förderung von Datenkompetenz in den Klassen 1–6. In Biehler, R. (Hrsg.). *Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik* 3. Kassel: KaDiSto.

Weinert, F. E. (2001). *Leistungsmessung in Schulen.* Weinheim: Beltz.

Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts der Universität Bayreuth (Hrsg.) (o. J.). *Sinus-Transfer. Modul 9: Verantwortung für das eigene Lernen stärken.* Bayreuth. Verfügbar unter http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/module/modul_9verantwortung_fuer_das_eigene_lernen_staerken.html [20.08.2013].

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung
des österreichischen Schulwesens

www.bifie.at