Lösungserwartung und Lösungsschlüssel zur prototypischen Schularbeit für die 7. Klasse
(Autor: Gottfried Gurtner)

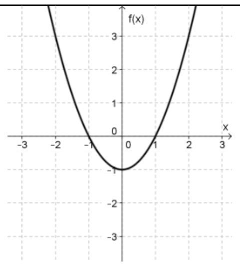
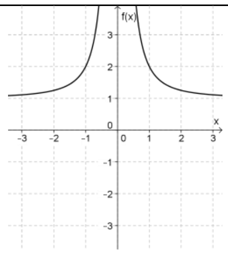
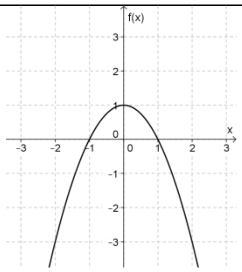
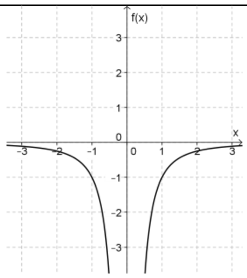
<u>Teil 1: Mathematische Grundkompetenzen</u>

1) Es muss (ausschließlich) die richtige Antwortmöglichkeit angekreuzt sein.

- ☐ $k > 0$ und $d > 0$
- ☐ $k > 0$ und $d < 0$
- ☐ $k = 0$ und $d > 0$
- ☐ $k = 0$ und $d < 0$
- ☒ $k < 0$ und $d > 0$
- ☐ $k < 0$ und $d < 0$

Grundkompetenz laut SRP-Konzept: FA2.3

2) Es müssen allen vier Graphen die richtigen Funktionsgleichungen zugeordnet werden.

Nr.	Graph
$\boxed{2}$	
$\boxed{4}$	
$\boxed{3}$	
$\boxed{6}$	

Nr.	Funktionsgleichung
1	$f(x) = x^2 + 1$
2	$f(x) = x^2 - 1$
3	$f(x) = -x^2 + 1$
4	$f(x) = x^{-2} + 1$
5	$f(x) = x^{-2} - 1$
6	$f(x) = -x^{-2}$

Grundkompetenz laut SRP-Konzept: FA3.1

3) Es müssen alle drei Intervalle richtig angegeben werden.
Auch offene Intervalle sind als richtig zu werten und bei den Intervallgrenzen -2 und 4 sind Abweichungen um 0,1 Einheiten zu tolerieren (also z.B. 3,9 statt 4).

f ist monoton steigend in: **[-5; -2] und [4; 7]**

f ist monoton fallend in: **[-2; 4]**

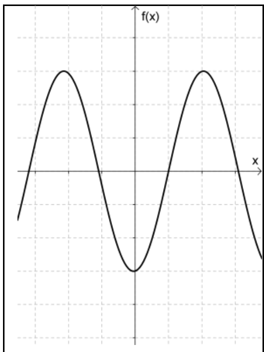
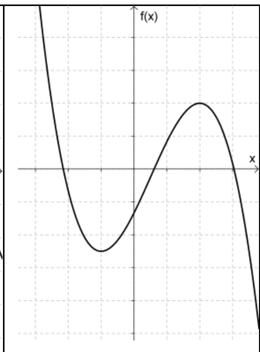
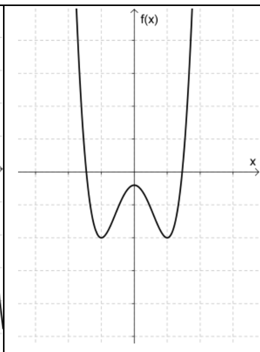
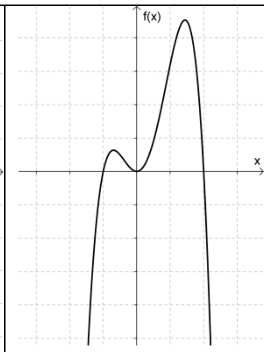
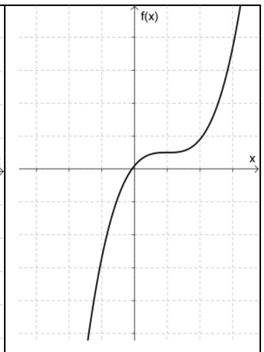
Grundkompetenz laut SRP-Konzept: FA1.5

4) Die Steigung muss richtig berechnet werden, wobei alle zu $-\frac{1}{2}$ äquivalenten Schreibweisen als richtig zu werten sind.

$$k = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

Grundkompetenz laut SRP-Konzept: FA2.2

5) Es müssen (ausschließlich) die beiden Graphen Nr. 2 und Nr. 5 angekreuzt sein.

				
☐	☒	☐	☐	☒

Grundkompetenz laut SRP-Konzept: FA4.1

6) Es dürfen ausschließlich die beiden richtigen Textbausteine angekreuzt sein.

	①
☐	drei Nullstellen
☐	zwei Extremstellen
☒	eine Wendestelle

	②
☐	die Gleichung $f'(x) = 0$ sicher zwei Lösungen besitzt.
☒	die Gleichung $f''(x) = 0$ sicher eine Lösung besitzt.
☐	die Gleichung $f(x) = 0$ sicher drei Lösungen besitzt.

Grundkompetenz laut SRP-Konzept: AN3.3

7) Beide Werte müssen richtig interpretiert werden. Die Einheit muss nicht angegeben sein.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die besiedelte Fläche 2 mm^2.
Die Bakterienkolonie wächst pro Stunde um 35 %.

Grundkompetenz laut SRP-Konzept: FA5.3

8) Beide Funktionswerte müssen in der Tabelle richtig ergänzt werden.

x	0	2	4	6
$g(x)$	**320**	80	20	**5**

Grundkompetenz laut SRP-Konzept: FA5.2

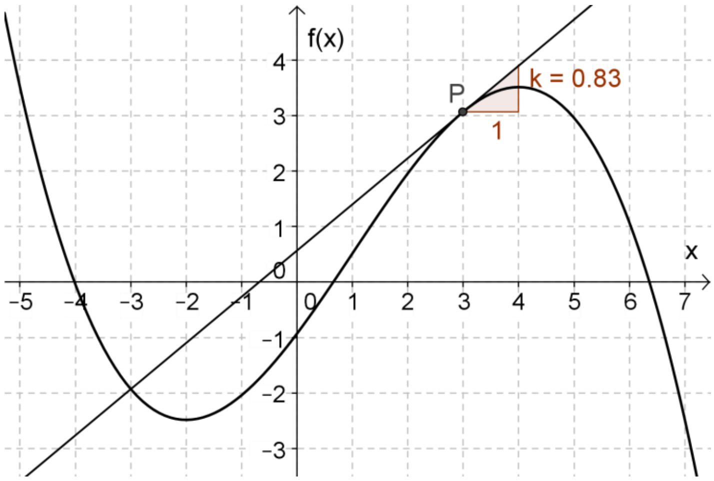
9) Beide Werte müssen richtig angegeben werden.

Absolute Änderung: **12 V**

Relative Änderung: **60 %**

Grundkompetenz laut SRP-Konzept: AN1.1

10) Im Punkt P muss die Tangente eingezeichnet sein, und die Steigung der Tangente muss richtig abgelesen werden. **Lösungsintervall für die Steigung: [0,7; 1]**



Grundkompetenz laut SRP-Konzept: AN1.3

11) Der Differenzenquotienten muss richtig berechnet und das Ergebnis richtig gedeutet werden.

$$k = \frac{\mathrm{f}(4) - \mathrm{f}(-2)}{4 - (-2)} = \frac{-6 - 3}{6} = -1{,}5$$

***k* ist die mittlere Änderung von *f* im Intervall [-2; 4]**

(oder: Steigung der Sekante durch die Punkte *P* und *Q*.)

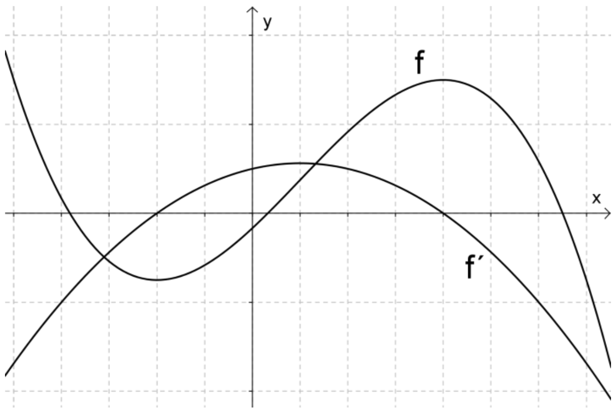
Grundkompetenz laut SRP-Konzept: AN1.3

12) Die Ableitungsfunktion muss richtig angegeben sein.

$$g'(x) = x^2 - 1 + \frac{4}{x^2}$$

Grundkompetenz laut SRP-Konzept: AN2.1

13) Der Graph von *f ´* muss folgende Bedingungen erfüllen:
Die Nullstellen von *f ´* müssen mit den Extremstellen von *f* übereinstimmen und der Graph muss die Form einer nach unten geöffneten Parabel besitzen.
Die *y*-Koordinate des Scheitelpunkts von *f ´* darf vom dargestellten Wert abweichen.



Grundkompetenz laut SRP-Konzept: AN3.2

14) Alle vier Bedingungen müssen richtig ergänzt sein.

$\mathrm{f}'(x_1) \; = \; 0$

$\mathrm{f}''(x_1) \; < \; 0$

$\mathrm{f}'(x_2) \; > \; 0$

$\mathrm{f}''(x_2) \; > \; 0$

Grundkompetenz laut SRP-Konzept: AN3.3

Teil 2: Verknüpfung von Grundkompetenzen und Reflexionswissen

1) a) *Bei richtigem Ergebnis ist dieser Punkt bei Bedarf als Ausgleichspunkt für Teil 1 heranzuziehen!*

Die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs A muss richtig angegeben werden.
(Die Berechnung muss nicht angeschrieben sein).

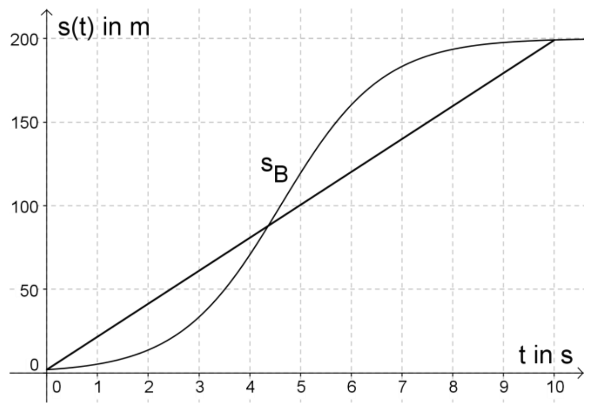
$\bar{v} = \frac{50}{5}$ m/s $=$ **10 m/s**

Eine sinngemäß richtige Möglichkeit zur näherungsweisen Ermittlung der Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs A zum Zeitpunkt $t = 5$ muss angegeben sein.
z.B. v(5) ist die Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $P = (5|50)$.
Es ist auch als richtig zu werten, wenn beschrieben wird, dass anhand des Graphen näherungsweise die Funktionsgleichung von s_A ermittelt und dann die erste Ableitung von s_A an der Stelle $t = 5$ berechnet werden kann.

b) Der Verlauf von s_A'' muss sinngemäß richtig begründet und im Hinblick auf den Bewegungsvorgang sinngemäß richtig gedeutet werden.
s_A'' ist die zweite Ableitung einer quadratischen Funktion und daher eine konstante Funktion. Der Graph von s_A'' ist daher eine waagrechte Gerade.
Interpretation: Die Beschleunigung des Fahrzeugs ist konstant (gleichmäßig beschleunigte Bewegung).

c) Der Zeitpunkt der Höchstgeschwindigkeit muss richtig ermittelt und sinngemäß richtig begründet werden.
Die Geschwindigkeit ist nach ca. 5 s am größten, weil *s* an dieser Stelle die größte Steigung besitzt, d.h. die momentane Wegänderung dort am größten ist.
Lösungsintervall: [4,5 s; 5,5 s]

Der Graph muss richtig eingezeichnet sein und die konstante Geschwindigkeit muss richtig angegeben werden.
Lösungsintervall für *v*: [19,5 m/s; 20 m/s]

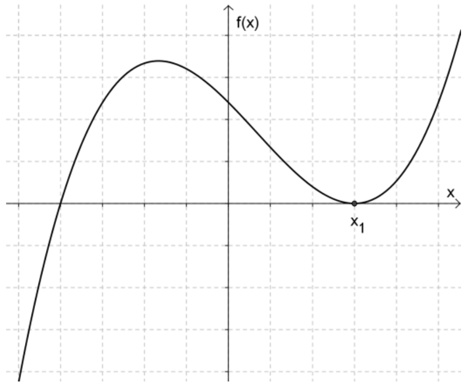


2) a) Es muss richtig begründet werden, dass f keine Extremstelle besitzt.

$f'(x) = 3ax^2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{3a}$ **ist in** $\mathbb{R}$ **nicht lösbar, wenn** $a > 0$ **und** $c > 0$ **sind.**

Daher besitzt *f* keine lokale Extremstelle.

Ein möglicher Verlauf einer Polynomfunktion vom Grad 3 muss skizziert und an der Stelle x_1 sinngemäß richtig beschrieben werden.



x_1 ist Null- und Extremstelle zugleich.
(oder: *f* berührt an der Stelle x_1 die *x*-Achse)

Auch das Skizzieren des Graphen einer Funktion *f* vom Typ $f(x) = a \cdot (x - x_1)^3$ **und das Beschreiben der Sattelstelle auf der *x*-Achse ist zulässig.**

b) *Bei richtiger Begründung ist dieser Punkt bei Bedarf als Ausgleichspunkt für Teil 1 heranzuziehen!*

Es muss sinngemäß richtig begründet werden, dass die Parameter a und b die Lage der Wendestelle von f bestimmen.

Das Krümmungsverhalten ändert sich bei der Wendestelle, bei der $f''(x) = 0$ **gelten muss.**

$f''(x) = 6ax + 2b = 0$

Daher bestimmen die Parameter *a* und *b* die Lage der Wendestelle.

Es müssen die Werte der Parameter b und d richtig angegeben werden.

Die Bedingungen $f''(0) = 0$ **und** $f(0) = 0$ **sind nur dann erfüllt, falls** $b = d = 0$ **gilt.**

3) a) *Bei richtiger Begründung ist dieser Punkt bei Bedarf als Ausgleichspunkt für Teil 1 heranzuziehen.*

Es ist eine sinngemäß richtige Begründung anzugeben, warum in den ersten beiden Jahren kein exponentielles Wachstum vorliegt.

Im ersten Jahr hat sich die Höhe der Birke verdreifacht, im 2. Jahr hat die Höhe mit einem geringeren Faktor (ca. 2,3) zugenommen.

Bei einem exponentiellen Wachstum müsste der Wachstumsfaktor konstant sein.

Die Höhe nach 6 Jahren muss richtig angegeben sein.

330 cm

b) Für beide Ableitungsfunktionen muss sinngemäß richtig begründet werden, warum sie streng monoton fallend sein können bzw. warum dies nicht möglich ist.

***H* kann nicht streng monoton fallend sein, da die Höhe des Baumes nicht abnimmt.**

Auch sinnvolle Begründungen für eine Abnahme der Höhe des Baumes (Wipfel bricht ab, Baum „schrumpft“ im Alter ein wenig, etc.) sind als richtig zu werten.

***H´* ist dann streng monoton fallend, wenn der Baum langsamer wächst als zuvor.**