Prototypische Schularbeit für die 7. Klasse (Autor: Gottfried Gurtner)

Lernstoff:

- Grundkompetenzen zu funktionalen Abhängigkeiten der 5. und 6. Klasse (FA1.1 – FA5.6)
- Grundkompetenzen zur Analysis der 7. Klasse (AN1.1 – AN1.3, AN2.1 – AN3.3)

Da die Grundkompetenzen zu funktionalen Abhängigkeiten eine wichtige Grundlage für die erfolgreiche Behandlung der Analysis in der 7. Klasse darstellen, ist deren Wiederholung bzw. Auffrischung am Beginn der 7. Klasse notwendig. Aufgabenstellungen zu diesen Grundkompetenzen sind daher im Teil 1 auch stark vertreten.
Im Hinblick auf Teil 2 wird vorausgesetzt, dass die Schüler/innen zum Zeitpunkt der Schularbeit mit innermathematischen Anwendungen der Differentialrechnung und mit dem physikalischen Kontext von Weg- und Geschwindigkeitsänderungen vertraut sind.

Gliederung:

Teil 1 besteht aus 14 Typ1-Aufgaben nach dem SRP-Konzept.
Bei jeder dieser Aufgaben ist ein Grundkompetenzpunkt zu erreichen.

Teil 2 besteht aus drei typ2-ähnlichen Aufgaben, in denen Grundkompetenzen in weniger vertrauten Situationen anzuwenden oder zu verknüpfen sind und Reflexionswissen nachzuweisen ist.
Jede dieser Aufgaben besteht aus 2 – 3 voneinander unabhängigen Teilaufgaben mit je zwei Aufgabenstellungen, die einen inhaltlichen Zusammenhang aufweisen. Bei jeder Teilaufgabe sind daher 2 Punkte zu erreichen.
Anteile der drei mit ☯ gekennzeichneten Aufgabenstellungen können im Hinblick auf eine positive Beurteilung zum Ausgleich von Fehlern in Teil 1 herangezogen werden. Es sind maximal drei „Ausgleichspunkte“ zu erreichen.

Beschreibung der Aufgaben:

Teil 1:

Es wurde eine breite „Streuung“ der Grundkompetenzen angestrebt. Wenn eine Grundkompetenz mehrfach durch Aufgabenstellungen abgebildet wird, dann handelt es sich um unterschiedliche Ausprägungen dieser Grundkompetenz.
Mit Ausnahme des „x aus 5“ – Formats wurden alle für die SRP möglichen Antwortformate verwendet.

Teil 2:

Die Einleitungen (Kontexte) der Aufgaben wurden absichtlich kurz gehalten, weil am Beginn der 7. Klasse umfangreichere Kontexte im Hinblick auf die Arbeitszeit (50 min) problematisch sein könnten, falls die Schüler/innen mit der Bearbeitung von Typ2-Aufgaben noch nicht so vertraut sind. Falls die Schüler/innen bereits seit der 5. Klasse schrittweise zu Typ2-Aufgaben hingeführt wurden, könnten auch anwendungs- und kontextbezogene Aufgaben mit umfangreicheren und komplexeren Einleitungstexten gegeben werden.
Die beiden Aufgabenstellungen einer Teilaufgabe sind teilweise voneinander unabhängig, was eher untypisch für Typ2-Aufgaben ist. Im Hinblick auf die Bewertung ist dies für die Schüler/innen aber manchmal von Vorteil, weil der zweite Punkt unabhängig vom ersten erreicht werden kann.

Aufgabe 1: Die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit ist eine typ1-ähnliche Komponente und kann daher bei Bedarf zum Ausgleich eines Fehlers in Teil 1 herangezogen werden. Die zweite Teilfrage erfordert neben Grundwissen über den Geschwindigkeitsbegriff (Momentangeschwindigkeit = momentane Wegänderung) auch eine Reflexion über die grafische Ermittlung derselben.
In Teilaufgabe b) ist das Wissen über den Funktionsterm der zweiten Ableitung einer quadratischen Funktion und den Graphen einer konstanten Funktion zu verknüpfen und über die Bedeutung des Verlaufs dieses Graphen zu reflektieren.
In Teilaufgabe c) ist das Wissen über Weg- und Geschwindigkeitsänderungen in vernetzter Form anzuwenden.

Aufgabe 2: Bei Teilaufgabe a) ist das Grundkompetenzwissen $f'(x) = 0$ anzuwenden und über die Lösbarkeit der quadratischen Gleichung zu reflektieren.
Bei der zweiten Teilfrage muss die symbolische Schreibweise geometrisch gedeutet und diese Deutung graphisch umgesetzt werden.
Jede dieser beiden Teilfragen von a) könnte auch 0-1-2-bewertet werden, wodurch die Aufgabe 1) stärker einer Typ2-Aufgabe entsprechen würde. In diesem Fall wären bei der gesamten Aufgabe 6 Punkte zu erreichen und das Gesamtpunktesystem müsste angepasst werden. Falls dies für die gewünschte Gewichtung von Teil 1 und Teil 2 hinderlich ist, könnte auch eine der beiden Teilfragen weggelassen werden.
In Teilaufgabe b) wird Grundwissen über den Wendepunkt mit einer einfachen Reflexion über die Lösung der linearen Gleichung verknüpft. Dieser Punkt kann bei Bedarf zum Ausgleich eines Fehlers in Teil 1 herangezogen werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Thema Krümmungsverhalten im Unterricht ausführlich behandelt wurde. Andernfalls wäre der Punkt nicht zum Ausgleich heranzuziehen.
Die zweite Teilfrage erfordert eine „Übersetzung“ der geforderten Bedingungen in Gleichungen und eine Reflexion über den Einfluss der Parameter a, b, c, d auf die Lösungen dieser Gleichungen.

Aufgabe 3: Die Frage nach der Eignung des exponentiellen Modells in Teilaufgabe a) ist typ1-ähnlich und kann daher bei Bedarf zum Ausgleich eines Fehlers in Teil 1 herangezogen werden.
Die zweite Teilfrage erfordert die Verknüpfung von zwei Grundkompetenzen, weil der Begriff der linearen Funktion nicht explizit erwähnt wird.
In Teilaufgabe b) ist eine Reflexion über die Bedeutung der beiden Funktionen H und H' und über den Wachstumsverlauf erforderlich.

Hilfsmittel:

Erlaubt sind die im Unterricht üblichen Hilfsmittel.
Mindestanforderung: numerischer Taschenrechner und mathematische Formelsammlung

Arbeitszeit: 100 Minuten

Teil 1: 50 Minuten (wird vor Austeilen von Teil 2 abgesammelt)

Teil 2: 50 Minuten

Beurteilungsvorschlag:

Werden (inkl. der in Teil 2 erreichten „Ausgleichspunkte“) weniger als 9 Grundkompetenzpunkte erreicht, ist die Arbeit mit „Nicht Genügend“ zu beurteilen (**unabhängig davon, wie viele Punkte insgesamt erreicht werden!**).

Sobald (incl. der „Ausgleichspunkte) mindestens 9 Grundkompetenzpunkte erreicht wurden, erfolgt die Beurteilung nach folgender Tabelle:

9 – 13 Punkte	Genügend
14 – 18 Punkte	Befriedigend
19 – 23 Punkte	Gut
24 – 28 Punkte	Sehr Gut

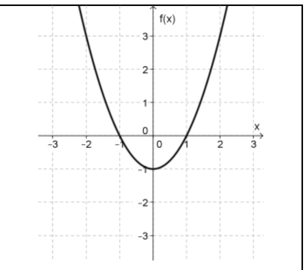
Aufgabenstellung

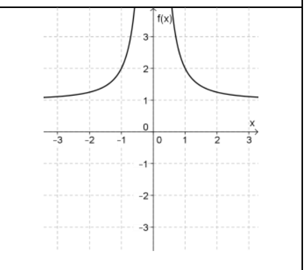
Teil 1: Mathematische Grundkompetenzen (Dauer: 50 min):

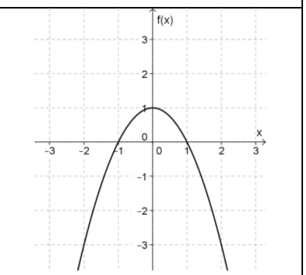
1) Gegeben ist eine lineare Funktion *f* mit der Gleichung $f(x) = k \cdot x + d$. Bei welcher Wahl der Parameter *k* und *d* verläuft der Graph von *f* durch den 1., 2. und 4. Quadranten des Koordinatensystems?
Kreuzen Sie die zutreffende Bedingung an! (1 P)

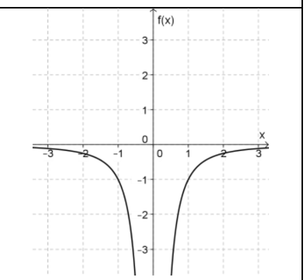
- ☐ $k > 0$ und $d > 0$
- ☐ $k > 0$ und $d < 0$
- ☐ $k = 0$ und $d > 0$
- ☐ $k = 0$ und $d < 0$
- ☐ $k < 0$ und $d > 0$
- ☐ $k < 0$ und $d < 0$

2) Gegeben sind vier Graphen von Potenzfunktionen.
Ordnen Sie jedem Graphen die Nummer der zugehörigen Funktionsgleichung zu! (1 P)

☐ 

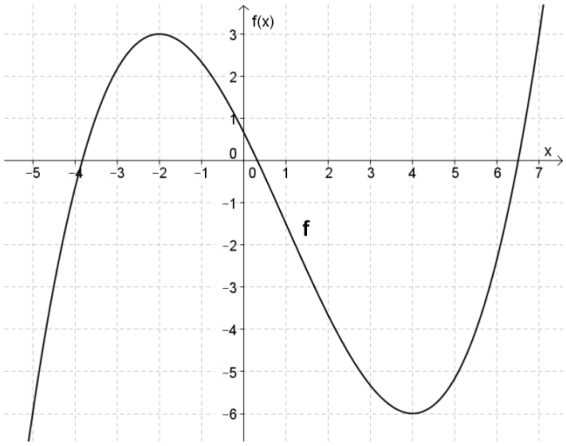
☐ 

☐ 

☐ 

Nr.	Funktionsgleichung
1	$f(x) = x^2 + 1$
2	$f(x) = x^2 - 1$
3	$f(x) = -x^2 + 1$
4	$f(x) = x^{-2} + 1$
5	$f(x) = x^{-2} - 1$
6	$f(x) = -x^{-2}$

3) Die Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion *f*.
Geben Sie das Monotonieverhalten von *f* im Intervall [-5; 7] an! (1 P)

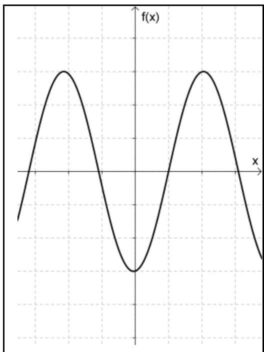
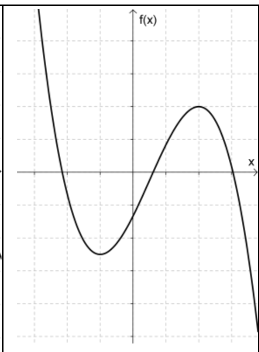
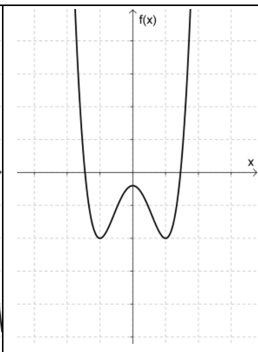
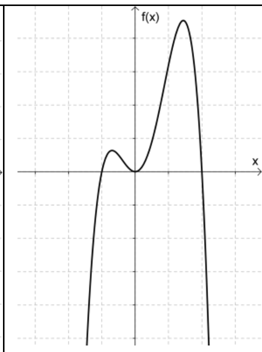
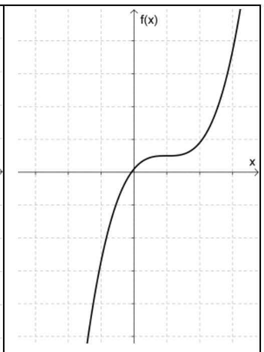


f ist monoton steigend in: ____________________

f ist monoton fallend in: _____________________

4) Der Graph einer linearen Funktion *f* mit der Funktionsgleichung $f(x) = k \cdot x + d$ verläuft durch die Punkte P = (-10|20) und Q = (20|5). Berechnen Sie den Wert von k. (1 P)

5) Welche dieser Abbildungen können den Graphen einer Polynomfunktion vom Grad 3 zeigen?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Abbildungen an! (1 P)

				
□	□	□	□	□

6) Ergänzen Sie die beiden fehlenden Textbausteine durch Ankreuzen, sodass ein mathematisch korrekter Satz entsteht! (1 P)
Eine Polynomfunktion *f* vom Grad 3 hat immer ____①_____, da ____②_____ .

	①
□	drei Nullstellen
□	zwei Extremstellen
□	eine Wendestelle

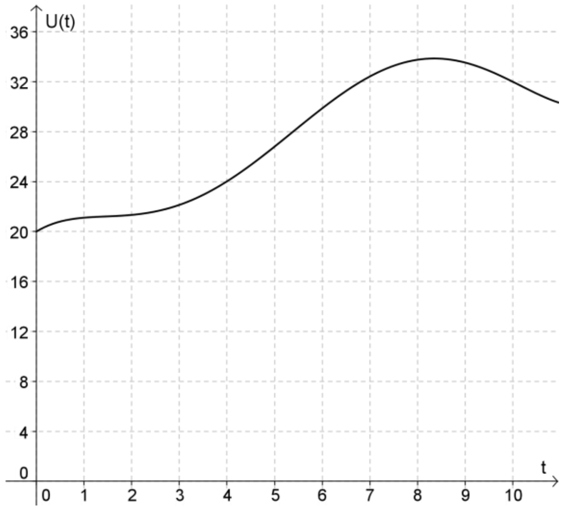
	②
□	die Gleichung $f'(x) = 0$ sicher zwei reelle Lösungen besitzt.
□	die Gleichung $f''(x) = 0$ sicher eine reelle Lösung besitzt.
□	die Gleichung $f(x) = 0$ sicher drei reelle Lösungen besitzt.

7) Das Wachstum einer Bakterienkolonie in Abhängigkeit von der Zeit t (in h) kann näherungsweise durch die Funktionsgleichung $A(t) = 2 \cdot 1{,}35^t$ beschrieben werden, wobei $A(t)$ die zum Zeitpunkt t besiedelte Fläche (in mm^2) angibt.
Interpretieren Sie die in der Funktionsgleichung vorkommenden Werte 2 und 1,35 im Hinblick auf den Wachstumsprozess! (1 P)

8) Die Funktion g beschreibt eine exponentielle Änderung.
Ergänzen Sie in der Tabelle die fehlenden Funktionswerte! (1 P)

x	0	2	4	6
$g(x)$		80	20	

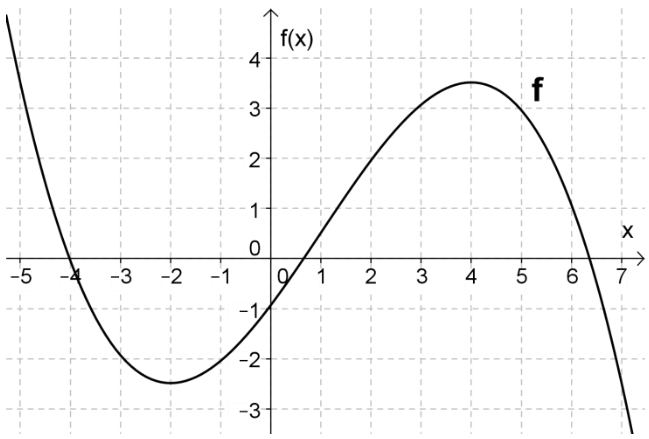
9) Die Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf (t in s) der Spannung U (in V) während eines physikalischen Experiments. (1 P)
Ermitteln Sie die absolute und die relative Änderung der Spannung während der ersten 10 Sekunden des Experiments!



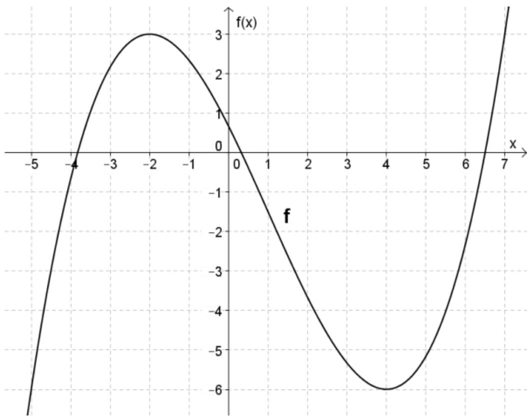
Absolute Änderung: __________ V

Relative Änderung: ___________ %

10) Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
Ermitteln Sie grafisch die momentane Änderungsrate von f an der Stelle $x = 3$ und geben Sie den Wert möglichst genau an! (1 P)



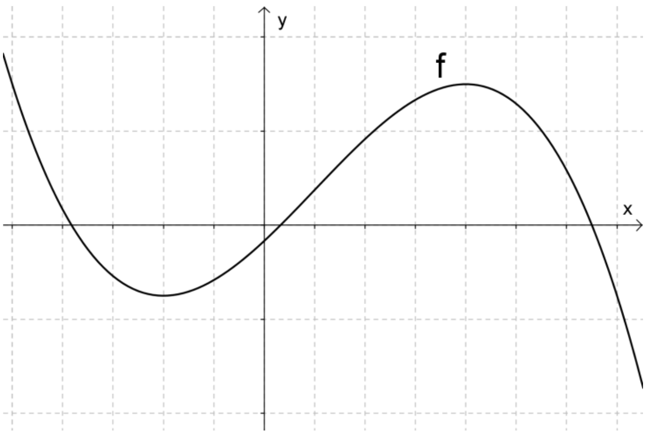
11) Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion *f*. (1 P)
Berechnen Sie den Differenzenquotienten von *f* im Intervall [-2; 4] und geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses an!



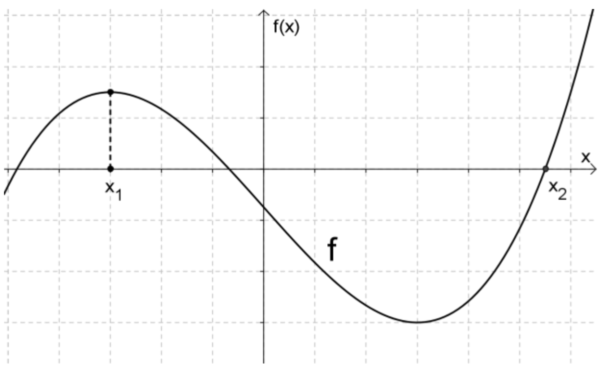
12) Berechnen Sie die 1. Ableitungsfunktion der Funktion *g*. (1 P)

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - x + 2 - \frac{4}{x} \qquad g'(x) = \underline{\hspace{6cm}}$$

13) Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion *f*.
Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion *f* ´ im gegebenen Koordinatensystem! (1 P)



14) Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *f*. (1 P)
Was kann aus der Abbildung über die erste bzw. die zweite Ableitung von *f* an den Stellen x_1 und x_2 ausgesagt werden?
Ergänzen Sie „< 0“, „= 0“ oder „> 0“.



$f'(x_1)$ _____

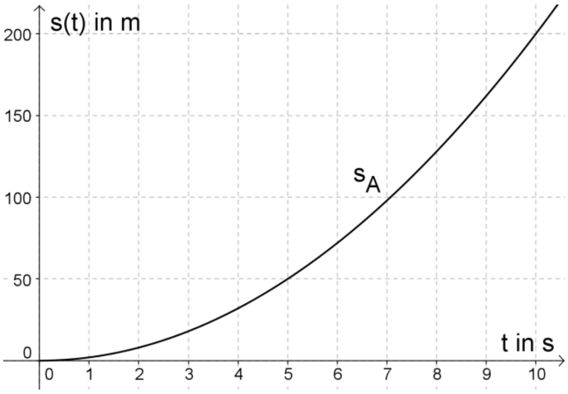
$f''(x_1)$ _____

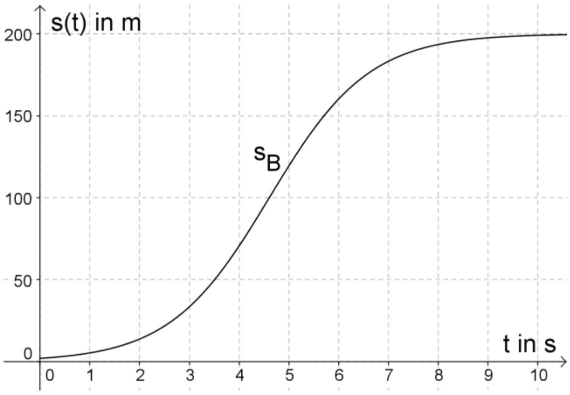
$f'(x_2)$ _____

$f''(x_2)$ _____

Teil 2: Verknüpfung von Grundkompetenzen und Reflexionswissen (Dauer: 50 min):

1) Die Abbildungen zeigen die *t*-*s*-Diagramme von Bewegungsvorgängen der Fahrzeuge A und B.





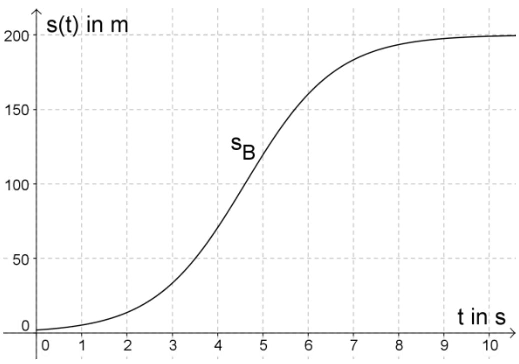
☯ a) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs A während der ersten 5 Fahrsekunden! (1 P)

Beschreiben Sie, wie man anhand des linken Diagramms näherungsweise die Momentangeschwindigkeit von Fahrzeug A nach 5 Fahrsekunden bestimmen kann! (1 P)

b) Angenommen, s_A kann durch eine quadratische Funktion modelliert werden. Begründen Sie, wie der Graph von s_A'' in diesem Fall verläuft, und interpretieren Sie diesen Verlauf im Hinblick auf den Bewegungsvorgang! (2 P)

c) Wann hat Fahrzeug B seine Höchstgeschwindigkeit erreicht? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 P)

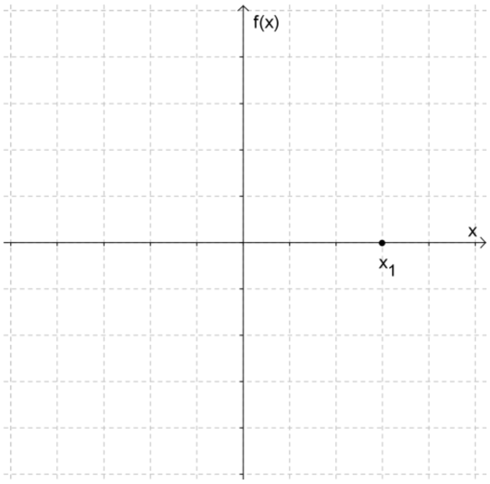
Geben Sie an, mit welcher konstanten Geschwindigkeit Fahrzeug B fahren hätte müssen, damit es im Zeitintervall [0; 10] denselben Weg wie im Diagramm dargestellt zurückgelegt hätte! Ergänzen Sie den entsprechenden Graphen dieser Zeit-Weg-Funktion im Diagramm! (1 P)



2) Jede Polynomfunktion *f* vom Grad 3 besitzt die allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wobei die Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (mit $a \neq 0$) die charakteristischen Eigenschaften von *f* bestimmen.

a) Wie viele lokale Extremstellen besitzt *f*, falls $a > 0$, $b = 0$ und $c > 0$ gilt?
Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch! (1 P)

Kann es eine Stelle x_1 geben, für die $f(x_1) = f'(x_1) = 0$ gilt?
Falls ja, dann skizzieren Sie im gegebenen Koordinatensystem einen möglichen Verlauf des Graphen von *f* und beschreiben Sie die Eigenschaften von *f* an der Stelle x_1.
Falls nein, dann begründen Sie neben dem Koordinatensystem, warum dies nicht möglich ist!
(1 P)



☯ b) Begründen Sie, welche der Parameter *a*, *b*, *c*, *d* entscheidend dafür sind, an welcher Stelle sich das Krümmungsverhalten von *f* ändert! (1 P)

Geben Sie an, welche Werte die Parameter *b* und *d* besitzen müssen, damit jener Punkt, in dem sich das Krümmungsverhalten von *f* ändert, im Koordinatenursprung liegt! (1 P)

3) Das Höhenwachstum einer Birke wird vier Jahre lang beobachtet. Zu Beobachtungsbeginn ist der Birkensetzling 10 cm hoch. Die folgende Tabelle zeigt die gemessenen Werte.

t in Jahren	0	1	2	3	4
Höhe H in cm	10	30	70	135	200

☯ a) Verläuft das Höhenwachstum der Birke während der ersten zwei Jahre exponentiell? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Tabellenwerte! (1 P)

Ermitteln Sie die Höhe der Birke nach 6 Jahren, wenn im Zeitintervall [2; 6] eine gleich bleibende mittlere Wachstumsgeschwindigkeit angenommen wird! (1 P)

b) Können die Funktionen H und H' in bestimmten Zeitintervallen auch streng monoton fallend sein? Begründen Sie Ihre Antwort für H und für H'! (2 P)