Komplexe Zahlen

**Bsp1:**

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^{2}+1=0$$

$$x^{2}+1=0$$

$$x^{2}=-1$$

$$x=\sqrt{-1}$$

In der Menge der reellen Zahlen $R$ hat die Gleichung keine Lösung:

$$L=\left\{ \right\}$$

Um dennoch eine Lösung für diese Gleichung angeben zu können wird die Menge der reellen Zahlen erweitert.

Es wird die Zahl $i$ eingeführt für die gilt: $i^{2}=-1$

|  |  |
| --- | --- |
| $$x^{2}=-1 \rightarrow $$ | $$x\_{1}=- i$$ |
| $$x\_{2}=i$$ |

Probe: $x\_{1}^{2}=\left(- i\right)^{2}=\left(- i\right)∙\left(- i\right)=i^{2}=-1$

 $x\_{2}^{2}=i^{2}=-1$

Über der Menge der komplexen Zahlen $C$ hat die Gleichung die Lösungsmenge

$$L=\left\{-i, i\right\}$$

*Beachte:*

1. Die Verwendung des Ausdrucks $\sqrt{-1}$ ist nicht sinnvoll, da dann die Multiplikation nicht mehr eindeutig wäre:

$$\sqrt{-1}∙\sqrt{-1}=\sqrt{\left(-1\right)∙\left(-1\right)}=\sqrt{1}=\pm 1$$

1. Die komplexe Zahl $i$ heißt *imaginäre Einheit*.

**Bsp2:**

Löse die Gleichung $x^{2}+9=0$ über der Menge der komplexen Zahlen $C$.

$$x^{2}+9=0$$

$$x^{2}=-9$$

$$x=\sqrt{-9}$$

$x\_{1}=-3i, $ denn $\left(-3i\right)^{2}=9∙i^{2}=-9$

$x\_{1}=3i, $ denn $\left(3i\right)^{2}=9∙i^{2}=-9$

**Bsp3:**

Gegeben sind zwei quadratische Gleichungen:

$$x^{2}-4x-12=0$$

$$x^{2}-4x+13=0$$

Bestimme die Lösungsmengen über der Menge der komplexen Zahlen $C$.

Berechne jeweils die Ausdrücke $x\_{1}+x\_{2}, x\_{1}∙x\_{2}$ und $\left(x-x\_{1}\right)∙\left(x-x\_{2}\right)$

$$x^{2}-4x-12=0$$

$$x\_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^{2}-q} $$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $x\_{1,2}=2\pm \sqrt{4+12}=2\pm \sqrt{16}=2\pm 4 \rightarrow $  | $$x\_{1}=-2 $$ | $$L=\left\{-2, 6\right\}$$ |
| $$x\_{2}=6 $$ |

$$x\_{1}+x\_{2}=-2+6=4$$

$$x\_{1}∙x\_{2}=-2∙6=-12$$

$$\left(x-x\_{1}\right)∙\left(x-x\_{2}\right)=\left(x+2\right)∙\left(x-6\right)=x^{2}+2x-6x-12= x^{2}-4x-12$$

$$x^{2}-4x+13=0$$

$$x\_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^{2}-q} $$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $x\_{1,2}=2\pm \sqrt{4-13}=2\pm \sqrt{-9}=2\pm 3i \rightarrow $  | $$x\_{1}=2-3i $$ | $$L=\left\{2-3i, 2+3i\right\}$$ |
| $$x\_{2}=2+3i $$ |

$$x\_{1}+x\_{2}=2-3i+2+3i=4$$

$$x\_{1}∙x\_{2}=\left(2-3i\right)∙\left(2+3i\right)=4-6i+6i-9∙i^{2}=4-9∙\left(-1\right)=4+9=13$$

$$\left(x-x\_{1}\right)∙\left(x-x\_{2}\right)=\left(x-\left(2-3i\right)\right)∙\left(x-\left(2+3i\right)\right)=$$

$$=x^{2}-\left(2-3i\right)∙x-x∙\left(2+3i\right)+\left(2-3i\right)∙\left(2+3i\right)=$$

$$=x^{2}-2x+3i∙x-2x-3i∙x+4-9∙i^{2}=$$

$$=x^{2}-4x+4-9∙\left(-1\right)=$$

$$=x^{2}-4x+13$$

|  |
| --- |
| Die *Menge* $C$ *der komplexen Zahlen* besteht aus Zahlen $z$ der Form$z=x+y∙i$ mit $x,y\in R$ und $i^{2}=-1$$$C=\left\{z=x+y∙i \left| x,y\in R ∧ \right.i^{2}=-1\right\}$$Für die komplexe Zahl $z=x+y∙i$ heißt $x$ ihr *Realteil* und $y$ ihr *Imaginärteil*. |

*Beachte:*

Die reellen Zahlen $R$ sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen $C$, denn

$$R=\left\{z=x+y∙i \left| x\in R ∧ y=0 ∧ i^{2}=-1\right.\right\}$$

**Bsp4:**

Stelle die komplexen Zahlen $z\_{1}=2-3i$, $z\_{2}=2+3i$, $z\_{3}=-4+2i$ und $z\_{1}=-2-4i$ in der *Gaußschen Zahlenebene (Komplexe Zahlenebene)* dar.



Beachte:

Komplexe Zahlen werden auch als geordnete Zahlenpaare $z=\left(x,y\right)$ mit $x,y\in R$ geschrieben.

**Bsp5:**

Berechne die gegebenen Quotienten.

|  |  |
| --- | --- |
| a) | $$\frac{1}{i}$$ |
| b) | $$\frac{1+i}{1-i}$$ |

ad a)

$$\frac{1}{i}=\frac{1}{i}∙\frac{i}{i}=\frac{i}{i^{2}}=\frac{i}{-1}=-i \rightarrow \frac{1}{i}=-i$$

ad b)

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}∙\frac{1+i}{1+i}=\frac{\left(1-i\right)^{2}}{1-i^{2}}=\frac{1+2i+i^{2}}{1-\left(-1\right)}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i \rightarrow \frac{1+i}{1-i}=i$$