### Übungen zu Differenzenquotient und Differentialquotient

1. *L: ---*

Gegeben ist die Funktion $f $mit der Gleichung $f\left(x\right)=0,1∙x^{2}$



Kreuze die beiden Aussagen an, die für die gegebene Funktion $f$ zutreffend sind.

|  |  |
| --- | --- |
| Die absolute Änderung in den Intervallen $\left[0;3\right] $ und $\left[4;5\right]$ ist gleich groß. | ⭘ |
| Die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $\left[0;2\right] $ und $\left[2;4\right]$ ist gleich groß. | ⭘ |
| Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x=5$ hat den Wert 2,5. | ⭘ |
| Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x=2$ ist größer alsdie momentane Änderungsrate an der Stelle $x=6$. | ⭘ |
| Die Steigung der Sekante durch die Punkte $A\left(f\left(3\right)\right) $ und $B\left(f\left(6\right)\right)$ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle$ x=3$. | ⭘ |

1. *L: ---*

Gegeben ist die Funktion $f $mit der Gleichung $f\left(x\right)=a∙x^{2} $mit $a\in R∖\left\{0\right\}$, sowie die Punkte $P\left(f\left(x\_{1}\right)\right) $und $Q\left(f\left(x\_{2}\right)\right)$ mit $x\_{1}<x\_{2} $.

Zeige, dass an der Stelle $x=\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}$ die Steigung der Funktion $f$ mit der Steigung der Sekante durch die Punkte $P$ und $Q$ übereinstimmt

1. *L: ---*

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion $f$ mit einer Sekante.



Vervollständige die folgenden Sätze, damit sie mathematisch korrekt sind:

Der Ausdruck ➀ beschreibt die ➁ .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ➀ |  | ➁ |
| $$\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f\left(h\right)}{h}$$ | ⭘ |  | die Steigung von $f$ an der Stelle $x$ | ⭘ |
| $$\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f\left(x\_{0}\right)}{h} $$ | ⭘ |  | die absolute Änderungsrate imIntervall $\left[x\_{0}; x\_{0}+h\right] $ | ⭘ |
| $$\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f\left(x\_{0}\right)}{h-x\_{0}}$$ | ⭘ |  | die absolute Änderungsrate imIntervall $\left[x\_{0}; x\_{0}+h\right]$ | ⭘ |

1. *L: 2;* $y=4∙x-11; y=2∙x-5$; *1*

Gegeben ist die Funktion $f\left(x\right)=\left(x-2\right)^{2}$

1. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $\left[3;z\right]$ für $z=0,1;0,01;0,001;0,0001;0,00001 $
2. Gib eine Formel für die mittlere Änderungsrate im Intervall $\left[x; z\right]$ an.
3. Wie groß ist die Änderungsrate an der Stelle $x=3$ ?
4. Berechne die Gleichung der Sekante durch die Punkte $P\left(f\left(3\right)\right) $und $Q\left(f\left(5\right)\right)$, so­wie die Gleichung der Tangente im Punkt $P$.
5. An welchen Stellen, hat die Funktion eine Steigung von $-2 $?
6. Zeichne den Graphen der Funktion $f$ im Intervall $\left[1; 5\right]$.
7. L:---

Zeichne im vorgegebenen Koordinatensystem den Graphen einer Funktion $f \left(f\ne g\right)$ ein, welche die gleiche Ableitungsfunktion wie die Funktion $g$ hat.

1. *L: 1*; $y=\frac{1}{2} ∙x-2;y=x+3$; *2*

Gegeben ist die Funktion $f$ mit der Gleichung $f\left(x\right)=0,25∙x^{2}+2$

1. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $\left[-2;z\right]$ für $z=0,1;0,01;0,001;0,0001;0,00001 $
2. Gib eine Formel für die mittlere Änderungsrate im Intervall $\left[x; z\right]$ an.
3. Wie groß ist die Änderungsrate an der Stelle $x=-2$ ?
4. Berechne die Gleichung der Sekante durch die Punkte $P\left(f\left(3\right)\right) $und $Q\left(f\left(0\right)\right)$, sowie die Gleichung der Tangente im Punkt $P$.
5. An welchen Stellen, hat die Funktion eine Steigung von $-1 $?
6. Zeichne den Graphen der Funktion $f$ im Intervall $\left[1; 5\right]$.
7. *L: 16,62; 49,05;* $4,905∙\left(t+z\right); $*9,81; 39,24; 207,236; 63,765; 31,883*

Balduin lässt von der Kante einer senkrechten Felswand einen Stein fallen. Der zurück­gelegte Weg $s$ (in m) zum Zeit­punkt $t$ (in s), wird durch die Funktion $s\left(t\right) $be­schrieben.

|  |  |
| --- | --- |
| $$s\left(t\right)=4,905∙t^{2} $$ |  |

1. Berechne die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervallen $\left[1;3\right]$ und $\left[4;6\right]$.
2. Gib eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $\left[t; z\right]$ an.
3. Wie groß ist die Geschwindigkeit zu den Zeitpunkten $t=1$ und $t=4$ ?
4. Der Stein prallt nach 6,5s auf. Wie hoch ist die Felswand? Mit welcher Durchschnitts­geschwindigkeit fiel der Stein und mit welcher Geschwindigkeit prallt er auf?
5. *L:* *490,088; 6898,937; 163,363; 2299,646;* $\frac{4∙π}{3}∙\left(t^{2}+t∙z+z^{2}\right)$; $4∙π∙r^{2}$; *50,265; 1809,557*

Balduin bläst einen kugelförmigen Luftballon auf und fragt sich unweigerlich, wie sich das Volumen verändert, wenn sich der Radius vergrößert. Der Radius ist in cm an­ge­geben.

$$V\left(r\right)=\frac{4∙π}{3}∙r^{3}$$

1. Berechne die absolute Änderung des Volumens in den Intervallen $\left[2;5\right]$ und $\left[12; 15\right]$.
2. Berechne die mittlere Änderungsrate des Volumens in den Intervallen $\left[2;5\right]$ und $\left[12; 15\right]$. Was beschreiben die Ergebnisse im Kontext dieser Aufgabe?
3. Gib eine Formel für die mittlere Änderungsrate des Volumens im Intervall $\left[t; z\right]$ an.

Hinweis: $a^{3}-b^{3}=\left(a-b\right)∙\left(a^{2}+a∙b+b^{2}\right) $

1. Gib eine Formel für die Änderungsrate des Volumens für einen beliebigen Radius $r$ an. Was beschreibt die Änderungsrate des Volumens im Kontext dieser Aufgabe?

Berechne die Änderungsrate des Volumens für $r=2$ und $r=12$.

### Polynomfunktionen und höhere Ableitungen

* 1. *L: ---*

Ordne der verbalen Aussage die passende formelmäßige Beschreibung zu.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Die Funktion $f$ ist im Intervall $\left[a;b\right] $streng monoton fallend | A |  |  | $$f^{'}\left(x\right)=0 ∧ f^{''}\left(x\right)>0$$ |
| Die Funktion $f$ ist im Intervall $\left[a;b\right] $linksgekrümmt | B |  |  | $$f^{'}\left(x\right)<0 für x\in \left[a;b\right] $$ |
| Die Funktion $f$ hat an der Stelle $x$ einen Tiefpunkt | C |  |  | $$f^{'}\left(x\right)>0 für x\in \left[a;b\right]$$ |
| Die Funktion $f$ hat an der Stelle $x$ einen Wendepunkt. | D |  |  | $$f^{''}\left(x\right)<0 für x\in \left[a;b\right]$$ |
|  |  |  |  | $$f^{'}\left(x\right)>0 für x\in \left[a;b\right]$$ |
|  |  |  |  | $$f^{'}\left(x\right)=0 ∧ f^{''}\left(x\right) <0 $$ |
|  |  |  |  | $$f^{''}\left(x\right)=0 ∧ f^{'''}\left(x\right) \ne 0$$ |

* 1. *L: ---*

Ordne der verbalen Aussage die passende formelmäßige Beschreibung zu.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Die Funktion $f$ ist im Intervall $\left[a;b\right] $streng monoton wachsend | A |  |  | $$f^{'}\left(x\right)=0 ∧ f^{''}\left(x\right)>0$$ |
| Die Funktion $f$ ist im Intervall $\left[a;b\right] $rechtsgekrümmt | B |  |  | $$f^{'}\left(x\right)<0 für x\in \left[a;b\right] $$ |
| Die Funktion $f$ hat an der Stelle $x$ einen Hochpunkt | C |  |  | $$f^{'}\left(x\right)>0 für x\in \left[a;b\right]$$ |
| Die Funktion $f$ hat an der Stelle $x$ einen Wendepunkt. | D |  |  | $$f^{''}\left(x\right)<0 für x\in \left[a;b\right]$$ |
|  |  |  |  | $$f^{'}\left(x\right)>0 für x\in \left[a;b\right]$$ |
|  |  |  |  | $$f^{'}\left(x\right)=0 ∧ f^{''}\left(x\right) <0 $$ |
|  |  |  |  | $$f^{''}\left(x\right)=0 ∧ f^{'''}\left(x\right) \ne 0$$ |

* 1. *L: ---*

In der untenstehenden Abbildung ist der Graph der Ableitungsfunktion $f^{'}$ einer Funktion $f$ dargestellt.

Kreuze die beiden Aussagen an, die nicht zutreffend sind.

|  |  |
| --- | --- |
| Die Funktion $f $hat im Intervall $\left[-4;4\right]$ drei lokale Extremstellen. | ⭘ |
| Die Funktion $f$ ist im Intervall $\left(2;3\right)$streng monoton steigend. | ⭘ |
| Die Funktion $f$ hat im Intervall $\left[-3;0\right]$ eine Wendestelle. | ⭘ |
| Die Funktion $f^{''}$ hat im Intervall $\left[-3;3\right]$ zwei Nullstellen | ⭘ |
| Die Funktion $f$ hat an der Stelle $x=0$ ein lokales Minimum. | ⭘ |

* 1. *L: ---*

Gegeben ist die Funktion $f $mit der Gleichung $f\left(x\right)=a∙x^{2}+b∙x+c $mit $a,b,c\in R $. Der Graph der Funktion $f$ verläuft durch den Punkt $A\left(4\right) $und berührt die $x $- Achse im Koordinatenursprung.

Kreuze die beiden Aussagen an, die nicht zutreffend sind.

|  |  |
| --- | --- |
| $$f\left(0\right)=0$$ | ⭘ |
| $$f\left(4\right)=2$$ | ⭘ |
| $$f\left(2\right)=4$$ | ⭘ |
| $$f^{'}\left(0\right)=0$$ | ⭘ |
| $$c=4$$ | ⭘ |

* 1. *L: ---*

In der untenstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion $f$ dargestellt. Der Punkt C ist ein Wendepunkt der Funktion $f$. Die Punkte $A$ und $E$ sind lokale Extrema.



Kreuze die beiden Aussagen an, die nicht zutreffend sind.

|  |  |
| --- | --- |
| $$f^{''}\left(x\_{1}\right)>0$$ | ⭘ |
| $$f^{'}\left(x\_{2}\right)>0$$ | ⭘ |
| $$f^{''}\left(x\_{3}\right)=0$$ | ⭘ |
| $$f^{'}\left(x\_{4}\right)<0$$ | ⭘ |
| $$f^{''}\left(x\_{5}\right)<0$$ | ⭘ |

* 1. *L:* $f\left(x\right)=x^{2}$

Gegeben ist die Funktion $f $mit der Gleichung $f\left(x\right)=x^{2}+b∙x+c $mit $b,c\in R $. Der Graph der Funktion $f$ verläuft durch den Ursprung. Die Steigung der Funktion im Ur­sprung hat den Wert Null. Ermittle die Werte der Parameter $b$ und $c$ und gib die Gleichung der Funktion $f$ an.

* 1. *L: ---*

Von einer Polynomfunktion $f$ dritten Grades sind die beiden lokalen Extrempunkte

$E\_{1}\left(-4\right) $und $E\_{2}\left(0\right)$ bekannt.

Kreuze die beiden Aussagen an, die nicht zutreffend sind.

|  |  |
| --- | --- |
| $$f\left(0\right)=-4$$ | ⭘ |
| $$f^{'}\left(0\right)=0$$ | ⭘ |
| $$f\left(-4\right)=0$$ | ⭘ |
| $$f^{'}\left(4\right)=0$$ | ⭘ |
| $$f^{''}\left(0\right)=0$$ | ⭘ |

* 1. *L: ---*

In der untenstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion $f$ dargestellt. An der Stelle $x=-0,5 $hat $f$ eine Wendestelle.

**

Kreuze die beiden Aussagen an, die nicht zutreffend sind.

|  |  |
| --- | --- |
| $$f^{'}\left(-3\right)=0$$ | ⭘ |
| $$f^{''}\left(-2\right)<0$$ | ⭘ |
| $$f^{'}\left(3\right)>0$$ | ⭘ |
| $$f^{''}\left(-0,5\right)=0$$ | ⭘ |
| $$f^{''}\left(2\right)<0$$ | ⭘ |

* 1. *L:* $N\_{1}\left(0\right); N\_{2}\left(0\right) ;H\left(5\right);T\left(0\right);W\left(2,5\right); -1,5$

Gegeben ist eine Polynomfunktion $f$ mit folgender Gleichung:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{25}∙\left(2∙x^{3}+3∙x^{2}-36∙x+44\right)$$

1. Bestimme die Nullstellen.
2. Ermittle die Monotoniebereiche und lokalen Extremstellen.
3. Ermittle die Krümmungsbereiche und Wendestellen.
4. Ist die Funktion achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch?
5. Wie verhält sich die Funktion für $x\rightarrow \pm \infty $?
6. Berechne die Steigung der Funktion $f$ im Wendepunkt. Welche Bedeutung hat dieses Ergebnis?
	1. *L:* $N\_{1}\left(0\right); N\_{2}\left(0\right); N\_{3}\left(0\right) ;T\left(-4\right);H\left(4\right);W\left(0\right); 3$

Gegeben ist eine Polynomfunktion $f$ mit folgender Gleichung:

$$f\left(x\right)=-\frac{1}{4}∙x^{3}+3∙x$$

1. Bestimme die Nullstellen.
2. Ermittle die Monotoniebereiche und lokalen Extremstellen.
3. Ermittle die Krümmungsbereiche und Wendestellen.
4. Ist die Funktion achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch?
5. Wie verhält sich die Funktion für $x\rightarrow \pm \infty $?
6. Berechne die Steigung der Funktion $f$ im Wendepunkt. Welche Bedeutung hat dieses Ergebnis?
	1. *L:* $N\_{1,4}\left(0\right); N\_{2,3}\left(0\right); T\_{1,2}\left(-3\right);H\left(4\right);W\_{1,2}\left(1\right); 3$

Gegeben ist eine Polynomfunktion $f$ mit folgender Gleichung:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{9}∙x^{4}-2∙x^{2}+6$$

1. Bestimme die Nullstellen.
2. Ermittle die Monotoniebereiche und lokalen Extremstellen.
3. Ermittle die Krümmungsbereiche und Wendestellen.
4. Ist die Funktion achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch?
5. Wie verhält sich die Funktion für $x\rightarrow \pm \infty $?
	1. *L:* $N\left(0\right); T\left(0\right); W\_{1}\left(\frac{11}{27}\right); S\left(1\right)$

Gegeben ist eine Polynomfunktion $f$ mit folgender Gleichung:

$$f\left(x\right)=3∙x^{4}-8∙x^{3}+6∙x^{2}$$

1. Bestimme die Nullstellen.
2. Ermittle die Monotoniebereiche und lokalen Extremstellen.
3. Ermittle die Krümmungsbereiche und Wendestellen.
4. Ist die Funktion achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch?
5. Wie verhält sich die Funktion für $x\rightarrow \pm \infty $?
	1. *L:* $f\left(x\right)=\frac{1}{18}∙x^{3}-\frac{3}{2}∙x+1$

Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat in $H\left(4\right) $einen Hochpunkt und in $T\left(-2\right)$ einen Tiefpunkt. Ermittle die Funktionsgleichung.

* 1. L: $f\left(x\right)=\frac{1}{32}∙\left(x^{3}+3∙x^{2}-45∙x-15\right) $

Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat in $W\left(1\right) $einen Wendepunkt und in $T\left(-3\right)$ einen Tiefpunkt. Ermittle die Funktionsgleichung.

* 1. L: $f\left(x\right)=x^{3}-6∙x^{2}+9∙x$

Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades schneidet die $x$ - Achse im Nullpunkt und berührt die $x$ - Achse an der Stelle $x=3$. Der Graph der Funktion verläuft durch den Punkt $P\left(4\right)$. Ermittle die Funktionsgleichung.

* 1. L: $f\left(x\right)=4∙x^{3}-x$

Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat im Koordinatenursprung einen Wende­punkt und die Steigung $-1 $. Der Graph der Funktion verläuft durch den Punkt $P\left(3\right)$. Ermittle die Funktionsgleichung.

* 1. L: $f\left(x\right)=\frac{1}{8}∙x^{4}-x^{2}+2$

Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades ist symmetrisch zur $y$ - Achse und berührt die $x$ - Achse an der Stelle $x=2$. Der Graph schneidet die y - Achse bei 2. Ermittle die Funktionsgleichung.

* 1. L: $f\left(x\right)=\frac{1}{4}∙\left(5∙x^{4}-7∙x^{3}-9∙x^{2}-23∙x\right)$

Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades geht durch den Koordinatenursprung. Im Punkt $P\left(3\right)$ ändert sich die Krümmung. Die Tangente im Punkt $P$ schließt mit der x - Achse einen Winkel von 135° ein. Ermittle die Funktionsgleichung. An der Stelle $x=1$ hat die Funktion einen lokale Extremstelle.

* 1. L:

Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades ist symmetrisch zur $y$ - Achse und geht durch den Nullpunkt. Im Punkt $P\left(4\right)$ ändert die Funktion ihr Monotonieverhalten.

### Berechnen der Ableitungsfunktion

Berechne die erste Ableitung und vereinfache so weit als möglich.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1) | a) | $$f\left(x\right)=2∙x^{2}∙\sqrt{x}$$ | L: | $$5∙x∙\sqrt{x}$$ |
|  | b) | $$f\left(x\right)=2∙x^{3}∙\sqrt[3]{x^{2}}$$ | L: | $$11∙x^{2}∙\sqrt[3]{x^{2}}$$ |
|  | c) | $$f\left(x\right)=\frac{2x}{\sqrt{x}}$$ | L: | $$\frac{1}{\sqrt{x}}$$ |
|  | d) | $$f\left(x\right)=\frac{3x}{\sqrt[3]{x^{2}}}$$ | L: | $$\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}$$ |
|  | e) | $$f\left(x\right)=\frac{3x^{2}}{4∙\sqrt[3]{x^{2}}}$$ | L: | $$\sqrt[3]{x}$$ |
|  | f) | $$f\left(x\right)=\frac{2x^{2}}{3∙\sqrt{x}}$$ | L: | $$\sqrt{x}$$ |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2) | a) | $$f\left(x\right)=\left(x-2\right)∙\left(x^{2}+2x+4\right)$$ | L: | $$3x^{2}$$ |
|  | b) | $$f\left(x\right)=\frac{1}{32}∙\left(x^{2}-2\right)∙\left(x^{2}+4\right)$$ | L: | $$\frac{1}{8}x^{3}$$ |
|  | c) | $$f\left(x\right)=2∙\sqrt{x}∙\left(x^{2}-6\right)$$ | L: | $$\frac{5x^{2}-6}{\sqrt{x}}$$ |
|  | d) | $$f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}-4}$$ | L: | $$\frac{x}{\sqrt{x^{2}-4}}$$ |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3) | a) | $$f\left(x\right)=x∙sin\left(2x\right)$$ | L: | $$sin\left(2x\right)+2x∙cos\left(2x\right)$$ |
|  | b) | $$f\left(x\right)=x^{2}∙ln\left(x\right)$$ | L: | $$x∙\left(2∙ln\left(x\right)+1\right)$$ |
|  | c) | $$f\left(x\right)=\left(x-1\right)∙\sqrt{x^{2}-1}$$ | L: | $$\frac{2x^{2}-x-1}{\sqrt{x^{2}-1}}$$ |
|  | d) | $$f\left(x\right)=sin\left(2x\right)∙cos\left(2x\right)$$ | L: | $$4∙cos^{2}\left(2x\right)-2$$ |
|  | e) | $$f\left(x\right)=sin\left(6x\right)∙e^{-0,5∙x}$$ | L: | $$e^{-0,5∙x}∙\left(12cos⁡(6x\right)-sin⁡(6x)$$ |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 4) | a) | $$f\left(x\right)=x^{2}∙e^{-\frac{x}{2}}$$ | L: | $$x∙e^{-\frac{x}{2}}∙\left(2-\frac{1}{2}x\right)$$ |
|  | b) | $$f\left(x\right)=sin\left(x\right)∙e^{sin\left(x\right)}$$ | L: | $$cos\left(x\right)∙e^{sin\left(x\right)}∙\left(1+sin\left(x\right)\right)$$ |
|  | c) | $$f\left(x\right)=\frac{x}{sin\left(x\right)}$$ | L: | $$\frac{sin\left(x\right)-x∙cos\left(x\right)}{sin^{2}\left(x\right)}$$ |
|  | d) | $$f\left(x\right)=\frac{sin\left(x\right)}{cos^{2}(x)}$$ | L: | $$\frac{2-cos^{2}(x)}{cos^{3}(x)}$$ |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 5) | a) | $$f\left(x\right)=\sqrt{1+tan^{2}\left(x\right)}$$ | L: | $$\sqrt{1+tan^{2}\left(x\right)}∙tan\left(x\right)$$ |
|  | b) | $$f\left(x\right)=\sqrt{1+ln^{2}\left(x\right)}$$ | L: | $$\frac{ln\left(x\right)}{x∙\sqrt{1+ln^{2}\left(x\right)}}$$ |
|  | c) | $$f\left(x\right)=\frac{x^{2}-2x}{\left(x+1\right)^{2}}$$ | L: | $$\frac{4x-2}{\left(x+1\right)^{3}}$$ |
|  | d) | $$f\left(x\right)=\frac{x^{2}∙\left(x-9\right)}{2∙\left(x-8\right)^{2}}$$ | L: | $$\frac{x∙\left(x-12\right)^{2}}{2∙\left(x-8\right)^{3}}$$ |
|  | e) | $$f\left(x\right)=\frac{x^{3}∙\left(8-x\right)}{2∙\left(x-6\right)^{3}}$$ | L: | $$-\frac{x^{2}∙\left(x-12\right)^{2}}{2∙\left(x-6\right)^{4}}$$ |
|  | f) | $$f\left(x\right)=\frac{x^{2}-6x+9}{3∙\left(x-3\right)^{3}}$$ | L: | $$-\frac{1}{3∙\left(x-3\right)^{2}}$$ |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 6) | a) | $$f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}$$ | L: | $$\frac{1}{\left(x^{2}+1\right)∙\sqrt{x^{2}+1}}$$ |
|  | b) | $$f\left(x\right)=\frac{4x^{2}-9}{4x-6}$$ | L: | $$1$$ |
|  | c) | $$f\left(x\right)=\frac{x-1}{x^{2}-1}$$ | L: | $$-\frac{1}{\left(x+1\right)^{2}}$$ |
|  | d) | $$f\left(x\right)=\frac{1}{tan\left(x\right)}$$ | L: | $$-\frac{1}{sin^{2}\left(x\right)}$$ |
|  | e) | $$f\left(x\right)=ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$$ | L: | $$\frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}$$ |
|  | f) | $$f\left(x\right)=ln\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\right)$$ | L: | $$\frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$$ |
|  | g) | $$f\left(x\right)=\frac{1}{2}∙ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$ | L: | $$\frac{1}{1-x^{2}}$$ |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 7) | a) | $$f\left(x\right)=-ln\left(cos\left(x\right)\right)$$ | L: | $$tan\left(x\right)$$ |
|  | b) | $$f\left(x\right)=\frac{x^{3}-1}{x^{2}+x+1}$$ | L: | $$1$$ |
|  | c) | $$f\left(x\right)=x∙\left(ln\left(x\right)-1\right)$$ | L: | $$ln\left(x\right)$$ |
|  | d) | $$f\left(x\right)=\frac{x^{3}-x^{2}+x-1}{x^{2}+1}$$ | L: | $$1$$ |
|  | e) | $$f\left(x\right)=\frac{x}{2}-\frac{sin\left(x\right)∙cos\left(x\right)}{2}$$ | L: | $$sin^{2}\left(x\right)$$ |
|  | f) | $$f\left(x\right)=\frac{x}{2}+\frac{sin\left(x\right)∙cos\left(x\right)}{2}$$ | L: | $$cos^{2}\left(x\right)$$ |

### Anwendungen der Differentialrechnung

1. *L: ---*



Ein Becken wird mit Wasser gefüllt. Die in das Becken zufließende Wassermenge, ange­geben in ${m^{3}}/{h}$, kann durch die Funktion $f$ be­schrieben werden. Die Funktion $f $hat an der Stelle $t=4$ eine Wende­stelle.

Kreuzen die beiden Aussagen an, die für die gegebene Funktion $f$ nicht zutreffend sind.

|  |  |
| --- | --- |
| An der Stelle $t=4$ geht die Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung über.  | ⭘ |
| An der Stelle $t=4$ geht die Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über | ⭘ |
| Der Wert der zweiten Ableitung der Funktion $f$ an der Stelle 4 ist null. | ⭘ |
| Es gilt $f^{''}\left(x\right)<0$ für $t>4$. | ⭘ |
| Für $t>4$ sinkt die pro Stunde zufließende Wassermenge.. | ⭘ |

1. *L: 0,3; 23,1%; 1,6; 6,5*

Die Funktion $h$ beschreibt die Wasserhöhe eines Bergsees in Abhängigkeit von der Zeit $t$. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $h$.



* 1. Bestimme den Wert des Differenzenquotienten des Wasserstands im Intervall [0; 2]

und beschreibe in Worten, was dieser Wert angibt. Um wie viel Prozent ist die Wasserhöhe während der ersten zwei Wochen gestiegen?

* 1. Was beschreibt die erste Ableitungsfunktion $h^{'} $ der Funktion $h$ im Kontext dieser Aufgabe? Bestimme näherungsweise den Wert des Differenzialquotienten der Wasserhöhe zum Zeitpunkt $t=6$ und beschreibe in Worten, was dieser Wert angibt.
	2. Was beschreibt die erste Ableitungsfunktion $h^{''} $ der Funktion $h$ im Kontext dieser Aufgabe? Wann etwa nimmt die Wasserhöhe am stärksten zu? Begründe deine Ant­wort.
1. *L: 1,581; -10;* $\left[0; \sqrt{8}\right] $*; -3;* $f\left(x\right)=x-3 $

Die Höhe $h$ einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit $t$ ab. Zuerst ist die Abnahme gering, mit der Zeit wird sie aber immer stärker. Daher kann die Höhe der Schneedecke durch folgende quadratische Funktion $h\left(t\right)$ beschrieben werden:

$$h\left(t\right)=h\_{0}-a∙t^{2} mit a>0, t\geq 0$$

Die Höhe $h$ wird in cm und die Zeit $t$ in Tagen gemessen, $h\_{0}$ beschreibt die Schneehöhe zu Beginn der Messung. Das beschriebene Modell gilt in guter Näherung bei einer Witterung mit gleichbleibender Temperatur bis zur vollständigen Schneeschmelze. Dabei wird vorausgesetzt, dass bis zur vollständigen Schneeschmelze kein weiterer Schnee hinzukommt.

1. Eine 20 cm dicke Schneedecke reduziert sich innerhalb von 12 Stunden auf 18 cm. Nach wie vielen Tagen (von Anfang an) ist der Schnee gänzlich geschmolzen?

Wie wirkt sich eine Erhöhung des Parameters $a$ auf $h\left(t\right)$ aus? Begründe deine Ant­wort.

1. In einem Alpendorf gilt für die Schneehöhe $h$ (gemessen in cm) und die Zeit $t$ (ge­messen in Tagen) der folgende funktionale Zusammenhang:

$$h\left(t\right)=40-5∙t^{2}$$

Wie hoch ist die mittlere Änderungsrate der Schneehöhe innerhalb der ersten beiden Tage nach Beginn der Messung?

Begründe, warum die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Zeitintervall $\left[0;3\right] $mithilfe der angegebenen Funktion nicht sinnvoll ist, um Aussagen über den Verlauf der Höhe der Schneedecke zu machen.

1. Berechne $h^{'}\left(0,5\right)$ für $h\left(t\right)=h\_{0}-a∙t^{2}$ und $a=3$. Deute das Ergebnis hinsichtlich der Entwicklung der Schneehöhe $h$.
2. Der folgende Graph beschreibt idealisiert den Verlauf der Schneehöhe in Dezimetern

innerhalb einer Woche in einem bestimmten Alpendorf. Handelt es sich bei diesem Graphen um eine auf $\left[0;7\right]$ definierte Funktion? Begründe deine Antwort.

Bestimmen die Gleichung einer linearen Funktion $f$, welche den Graphen im Intervall $\left[3;5\right]$ beschreibt.



1. *L: 24,180°; 2,940; 10,742;* $\frac{2∙sin\left(β\right)∙cos\left(β\right)∙v\_{0}^{2}}{g}$*; 40,030° < 45°;* $β=atan\left(a\right) $

Für die Beschreibung der Flugbahn der gestoßenen Kugel beim Kugelstoßen kann mit guter Näherung die Gleichung der Wurfparabel verwendet werden. Diese Gleichung lautet:

$$y=tan\left(β\right)∙x-\frac{g}{2∙v\_{0}^{2}∙cos^{2}\left(β\right)}∙x^{2} g=9,81 {m}/{s^{2}}$$

Dabei ist $v\_{0}$ die Abwurfgeschwindigkeit der Kugel und $β$ der Winkel, unter dem die Parabel die $x $- Achse schneidet. Die größte Wurfweite wird für $β=45°$ erzielt.



Die Computersimulation der Flugbahn der gestoßenen Kugel eines Athleten ergab für eine Gleichung der Bahnkurve $ y=0,84∙x-0,06∙x^{2}$. Der Abstoßpunkt der Kugel be­fand sich in einer Höhe von 2,1 m

1. Berechne die Größe des Abstoßwinkels $α$ und die maximale Höhe, die von der Kugel des Athleten erreicht wurde. Runden auf cm.
2. Welche Wurfweite hat der Athlet erzielt? Welchen Einfluss hat die Größe der Fall­beschleunigung $g $bei sonst gleichen Bedingungen auf die Wurfweite? Begründe deine Antwort.
3. Berechne die Größe des Winkels $β$ und überprüfe, ob dieser Athlet die größte Wurf­weite erreicht hat.
4. Erläutere, ob anhand der Parameter $a$ und $b$ in der allgemeinen Bahnkurve $y=a∙x-b∙x^{2}$ bereits feststellbar ist, ob eine Athletin/ein Athlet die größte Wurf­weite erzielt hat.
5. *L:* $\left[0;R\right] $*;* $x\left(v\right)=\sqrt{1-\frac{v}{v\_{m}}}$*;* $v^{'}\left(x\right)=-v\_{m}∙\frac{2x}{R^{2}}$

In einem Blutgefäß hängt die Geschwindigkeit $v$ des Blutes davon ab, wie groß der Ab­stand $x$ zum Mittelpunkt ist. Ein gültiger Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $v$ und dem Abstand $x$ kann mittels folgender Formel modelliert werden.

$$v\left(x\right)=v\_{m}∙\left(1-\frac{x^{2}}{R^{2}}\right) $$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$R$$ | … | Innenradius des Blutgefäßes in mm |
| $$v\_{m}$$ | … | maximale Geschwindigkeit des Blutes im Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s |
| $$x$$ | … | Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in mm |
| $$v\left(x\right)$$ | … | Geschwindigkeit des Blutes bei Abstand $x$ vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s |

1. Gib einen Definitionsbereich für $x$ an, der für das Blutgefäß sinnvoll ist, und be­gründe, warum die Formel eine vereinfachte Beschreibung der Blutgeschwindigkeit ist.
2. In einem Lehrbuch der Medizin wird behauptet, dass beim Abstand $x=\frac{R}{2}$ die Ge­schwindigkeit des Blutes 75 % vom maximalen Wert beträgt. Um die Aussage mathematisch zu beweisen, wird der Ansatz $v\left(x\right)=\frac{3}{4}∙v\_{m}$ gemacht, und damit wird die Stelle $x$ berechnet. Führe die Berechnung von der Stelle $x$ aus und zeige, dass man mit der Berechnung des Funktionswerts $v\left(\frac{R}{2}\right)$ zum gleichen Ergebnis kommt.
3. Forme die gegebene Formel für $v\left(x\right)$ so um, dass man eine Funktion $x\left(v\right)$ erhält. Er­läutere, was der Funktionswert $x\left(\frac{v\_{m}}{2}\right)$ für die Blutströmung bedeutet.
4. Gib die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit $v$ (bei Veränderung von $x$) beim Abstand $x$ an und gib an, was das Vorzeichen der Änderungsrate über das Ver­halten der Blutströmung aussagt.
5. *L: 9,458; 10,125*

Manche einjährige Nutz- und Zierpflanzen wachsen in den ersten Wochen nach der Pflanzung sehr rasch. Im Folgenden wird nun eine spezielle Sorte betrachtet. Die end­gültige Größe einer Pflanze der betrachteten Sorte hängt auch von ihrem Standort ab und kann im Allgemeinen zwischen 1,0 m und 3,5 m liegen. Pflanzen dieser Sorte, die im Innenbereich gezüchtet werden, erreichen Größen von 1,0 m bis 1,8 m. In einem Experiment wurde der Wachstumsverlauf dieser Pflanze im Innenbereich über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe dokumentiert. Im Anschluss wurde die Höhe $h$ dieser Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit $t$ durch eine Funktion $h$ modelliert.

$$h\left(t\right)=\frac{1}{24}∙\left(-t^{3}+27∙t^{2}+120\right) $$

Dabei bezeichnet $t$ die Anzahl der Wochen seit der Pflanzung und $h\left(t\right)$ die Höhe zum Zeitpunkt $t$ in Zentimetern.

1. Zeichne den Graphen der Funktion $h$ im Beobachtungszeitraum $\left[0;17\right] $.
2. Berechne den Wert des Quotienten $\frac{h\left(13\right)-h\left(9\right)}{4}$ und den Wert von $h^{'}\left(9\right)$. Welche Be­deutung haben die beiden berechneten Ergebnisse im gegebenen Kontext?
3. Zeige durch Rechnung, dass die Funktion $h$ im gegebenen Intervall keinen lokales Maximum hat. Begründe deine Rechenschritte.
4. Für das Wachstum der beobachteten Pflanze ist auch die entsprechende Düngung von Bedeutung. Im gegebenen Fall wurde die Pflanze zwei Wochen vor dem Zeit­punkt des stärksten Wachstums gedüngt. Ermittle diesen Zeitpunkt durch Rechnung und begründe deine Überlegungen.
5. Im selben Zeitraum wurde das Höhenwachstum von zwei weiteren Pflanzen der gleichen Sorte beobachtet und modelliert. Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen der entsprechenden Funktionen $h\_{1}$ und $h\_{2}$. Vergleiche das Krümmungs­verhalten der Funktionen $h$, $h\_{1}$ und $h\_{2}$ im Intervall $\left[0;17\right]$ und interpretiere es im Hin­blick auf das Wachstum der drei Pflanzen.



1. *L: 3,5s; 2,5s; 40,4m; -4,905m/s; -29,405m/s;* $ t\_{E}=\sqrt{\frac{2∙h\_{0}}{g}}; -g∙t; $*-34,31m/s; -17,155m/s*

Balduin lässt von einem 60 m hohen Aussichtsturm einen Stein fallen. Die Höhe $h$ (in m) zum Zeit­punkt $t$ (in s), wird durch die Funktion $h\left(t\right) $be­schrieben.

$$h\left(t\right)=h\_{0}-\frac{g}{2}∙t^{2}$$

$h$ … Höhe [m], $h\_{0}$ … Ausgangshöhe [m], $t$ … Zeit [s], $g=9,81 {m}/{s^{2}}$

1. Zu welchem Zeitpunkt $t\_{E} $ trifft der Stein auf den Boden auf? Gib eine Formel an.
2. Wann beträgt die Höhe 30 m? Bestimme die Höhe nach 2 s.
3. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Zeitintervallen $\left[0;1\right] $und $\left[t\_{E}-1;t\_{E}\right]$. Welche Bedeutung haben die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe?
4. Bestimme die erste Ableitung $h^{'}$ für die gegebenen Werte und allgemein. Welche Be­deutung hat die erste Ableitung im Kontext dieser Aufgabe?
5. Berechne die Änderungsrate zum Zeitpunkt $t\_{E}$ und die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall $\left[0; t\_{E}\right]$. Erläutere die Ergebnisse im Kontext.
6. Zeichne die Graphen der Funktionen $h$ und $h’$. Interpretiere jeweils deren Verlauf.
7. *L: 4,1s; 2,0s; 20,4m; 0,6s; 3,5s; 15,9m; 12,642m/s;- 12,642m/s;* $\frac{2∙v\_{0}}{g};\frac{v\_{o}}{g}; \frac{v\_{0}^{2}}{2∙g}; v\_{0}-g∙t$

*-20 m/s; 10m/s; -10m/s*

Eine kleine Metallkugel wird mit 20 m/s lotrecht nach oben geworfen. Die Höhe $h$ (in m) zum Zeit­punkt $t$ (in s), wird durch die Funktion $h\left(t\right) $be­schrieben.

$$h\left(t\right)=v\_{0}∙t-\frac{g}{2}∙t^{2}$$

$h$ … Höhe [m], $v\_{0}$ … Anfangsgeschwindigkeit [m/s], $t $… Zeit [s], $g=9,81 {m}/{s^{2}}$

1. Zu welchem Zeitpunkt $t\_{E}$ trifft die Kugel auf den Boden auf? Gib eine Formel an.
2. Wann erreicht die Kugel ihre maximale Höhe? Wie groß ist die maximale Höhe? Be­rechne die Größen auch allgemein.
3. Wann beträgt die Höhe 10 m? Bestimme die Höhe nach 3 s.
4. Berechne die mittlere Änderungsrate für die ersten 1,5 s und die letzten 1,5 s$ $des Fluges. Welche Bedeutung haben die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe?
5. Bestimme die erste Ableitung allgemein. Welche Bedeutung hat die erste Ableitung im Kontext dieser Aufgabe?
6. Berechne die Änderungsrate zum Zeitpunkt $t\_{E}$ und die mittlere Änderungsrate in den Zeitintervallen $\left[0;\frac{ t\_{E}}{2}\right]$ und $\left[\frac{ t\_{E}}{2}; t\_{E}\right]$. Erläutere die Ergebnisse im Kontext.
7. Ist es sinnvoll die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall $\left[0; t\_{E}\right]$ zu berechnen? Be­gründe deine Antwort.
8. Zeichne die Graphen der Funktionen $h$und $h’. $Interpretiere jeweils deren Verlauf.
9. *L: 8,7s; 2,0s; 220,4s; 4,1s; 7,0s; 7,9s; 216m; 143,5m; 0,38m/s; -38,86m/s; -65,757m/s; 10m/s; -32,879m/s;* $\frac{2∙v\_{0}+2∙\sqrt{v\_{0}^{2}-2∙g∙h}}{2g}; \frac{v\_{0}}{g};h\_{0}+\frac{v\_{0}^{2}}{2g}; \frac{2∙v\_{0}}{g};v\_{0}-g∙t$

Eine Kugel wird von der in 200m Höhe liegenden Aussichtsplattform eines Fernseh­turms mit 20 m/s lotrecht nach oben geworfen. Die Höhe $h$ (in m) zum Zeit­punkt $t$ (in s), wird durch die Funktion $h\left(t\right) $be­schrieben.

$$h\left(t\right)=h\_{0}+v\_{0}∙t-\frac{g}{2}∙t^{2} g=9,81 {m}/{s^{2}}$$

$h$ … Höhe [m], $v\_{0}$ … Anfangsgeschwindigkeit [m/s], $h\_{0}$ … Ausgangshöhe [m], $t$ … Zeit [s],

1. Zu welchem Zeitpunkt $t\_{E}$ trifft die Kugel auf den Boden auf? Gib eine Formel an.
2. Wann erreicht die Kugel ihre maximale Höhe? Wie groß ist die maximale Höhe? Be­rechne die Werte auch allgemein.
3. Wann passiert die Kugel die Aussichtsplattform? Rechne auch allgemein.
4. Wann beträgt die Höhe 100 m bzw. 50 m? Bestimme die Höhe nach 3 s und 6 s.
5. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Zeitintervallen $\left[1;3\right] $und $\left[5;7\right]$. Welche Bedeutung haben die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe?
6. Berechne die Änderungsrate zum Zeitpunkt $t\_{E}$ und die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall des Aufstiegs der Kugel und jenem des Falls der Kugel. Erläutere die Er­gebnisse im Kontext.
7. Bestimme die erste Ableitung allgemein und erläutere deren Bedeutung im Kontext.
8. Zeichne den Graphen der Funktion $h$ und $h’$. Interpretiere jeweils deren Verlauf.
9. *L:11,5s; 5,8s; 163m; 2,2s; 9,4s; 126m; 46,759m/s; -46,759m/s; -56,569m/s; 28,284m/s; -28,284m/s;* $\frac{2∙v\_{0}∙sin\left(α\right)}{g}; \frac{v\_{0}∙sin\left(α\right)}{g}; \frac{v\_{0}^{2}∙sin^{2}\left(α\right)}{2g}; v\_{0}∙sin\left(α\right)-g∙t$

Eine historische Kanone feuert eine Kugel mit 80 m/s unter einem Winkel von $α=45°$ nach oben.

$$h\left(t\right)=v\_{0}∙sin\left(α\right)∙t-\frac{g}{2}∙t^{2}$$

$h$ … Höhe [m], $v\_{0}$ … Anfangsgeschwindigkeit [m/s], $t$ … Zeit [s], $g=9,81 {m}/{s^{2}}$

1. Zu welchem Zeitpunkt $t\_{E}$ trifft die Kugel auf den Boden auf? Gib eine Formel an.
2. Wann erreicht die Kugel ihre maximale Höhe? Wie groß ist die maximale Höhe? Be­rechne die Werte allgemein.
3. Wann beträgt die Höhe 100 m? Bestimme die Höhe nach 3 s.
4. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Zeitintervallen $\left[0;2\right] $und $\left[t\_{E}-2;t\_{E}\right]$. Welche Bedeutung haben die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe?
5. Berechne die Änderungsrate zum Zeitpunkt $t\_{E}$ und die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall des Aufstiegs der Kugel und jenem des Falls der Kugel. Erläutere die Er­gebnisse im Kontext.
6. Ist es sinnvoll die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall $\left[0; t\_{E}\right]$ zu berechnen? Be­gründe deine Antwort.
7. Bestimme die erste Ableitung allgemein und erläutere deren Bedeutung im Kontext.
8. Zeichne den Graphen der Funktion $h$ und $h’$. Interpretiere jeweils deren Verlauf.
9. *L: 653m; 326m; 163m; 123m; 529m; 139m; 0,54m/m; -0,539m/m; 0,693m/m; -0,386m/m; 0,5m/m; -0,5m/m;* $\frac{2∙sin\left(α\right)∙cos\left(α\right)∙v\_{0}^{2}}{g}; \frac{sin\left(α\right)∙cos\left(α\right)∙v\_{0}^{2}}{g}; \frac{sin^{2}\left(α\right)∙v\_{0}^{2}}{2g};$

$ tan\left(α\right)-\frac{g}{v\_{0}^{2}∙cos^{2}\left(α\right)}∙x $

Eine historische Kanone feuert eine Kugel mit 80 m/s unter einem Winkel von $α=45°$ nach oben. Die Flugbahn der Kugel wird durch folgende Formel beschrieben.

$$y\left(x\right)=tan\left(α\right)∙x-\frac{g}{2∙v\_{0}^{2}∙cos^{2}\left(α\right)}∙x^{2} g=9,81 {m}/{s^{2}}$$

$y$ … Höhe [m], $v\_{0}$ … Anfangsgeschwindigkeit [m/s], $x$ … Wurfweite [m]

1. Nach wie vielen Metern trifft die Kugel wieder auf dem Boden auf? Gib eine Formel zur Berechnung der Schussweite an.
2. Nach wie vielen Metern erreicht die Kugel ihre maximale Höhe? Wie groß ist die maxi­male Höhe? Berechne die Werte auch allgemein.
3. Nach wie vielen Metern beträgt die Höhe 100 m? Bestimme die Höhe nach 200 m.
4. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $\left[100;200\right] $und $\left[452;552\right]$. Welche Bedeutung haben die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe?
5. Berechne die Änderungsrate bei $x=100 $ und $x=452$. Erläutere die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe.
6. Berechne die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall des Aufstiegs der Kugel und jenem des Falls der Kugel. Erläutere die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe.
7. Bestimme die erste Ableitung allgemein und erkläre ihre Bedeutung im Kontext.
8. Zeichne den Graphen der Funktion $y$ und $y’$. Interpretiere jeweils deren Verlauf.
9. *L: 45°; 13,689°; 76,311°;* $\frac{2∙sin\left(α\right)∙cos\left(α\right)∙v\_{0}^{2}}{g}; $

Eine historische Kanone feuert eine Kugel ab. Die Flugbahn der Kugel wird durch folgende Formel beschrieben.

$$y\left(x\right)=tan\left(α\right)∙x-\frac{g}{2∙v\_{0}^{2}∙cos^{2}\left(α\right)}∙x^{2} g=9,81 {m}/{s^{2}}$$

$y$ … Höhe [m], $v\_{0}$ … Anfangsgeschwindigkeit [m/s], $x$ … Wurfweite [m],

$α …$ Abschusswinkel

1. Bestimme eine Formel zur Berechnung der Schussweite. Für welchen Winkel $α$ wird die Wurfweite maximal?
2. Unter welchem Winkel $α$ muss die Kanone abgefeuert werden, wenn die Kugel in einer Entfer­nung von 300 m aufschlagen soll und $v\_{0}=80{m}/{s}$ beträgt?
3. L: $w\left(α\right)=\frac{2}{g}∙sin\left(α\right)∙cos\left(α\right)∙v\_{0}^{2}; w\left(v\right)=\frac{2}{g}∙sin\left(α\right)∙cos\left(α\right)∙v^{2};45°$

Eine historische Kanone feuert eine Kugel ab. Die Flugbahn der Kugel wird durch folgende Formel beschrieben.

$$h\left(x\right)=tan\left(α\right)∙x-\frac{g}{2∙v\_{0}^{2}∙cos^{2}\left(α\right)}∙x^{2} g=9,81 {m}/{s^{2}}$$

$h$ … Höhe [m], $v\_{0}$ … Anfangsgeschwindigkeit [m/s], $x$ … Wurfweite [m]

$α …$ Abschusswinkel

1. Stelle die Wurfweite als Funktion des Winkels $α$ dar. Zeichne den Graphen dieser Funktion, wenn $v\_{0}=80{m}/{s}$ und interpretiere seinen Verlauf.
2. Für welchen Winkel wird die Wurfweite maximal?
3. Stelle die Wurfweite als Funktion des der Abschussgeschwindigkeit $v$ dar. Zeichne den Graphen dieser Funktion, wenn $α=45°$ und $0 m/s \leq v \leq 200 m/s$. interpretiere seinen Verlauf.
4. *L: 504,8m; 356,9m;* $v\_{0}∙\sqrt{\frac{2h\_{0}}{g}}; -\frac{g}{v\_{0}^{2}}∙x;$ *-0,098m/m; 1,038m/m; -1,88m/m; -1,781m/m*

Ein Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von 180 km/h wirft ein Versorgungspaket ab. Die Flughöhe beträgt zum Zeitpunkt des Abwurfs 500 m.

$$h\left(x\right)=-\frac{g}{2∙v\_{0}^{2}}∙x^{2}+h\_{0}$$

$$g=9,81 {m}/{s^{2}}$$

$h$ … Höhe [m], $x$ … waagrechte Entfernung [m], $v\_{0}$ … horizontale Geschwin­digkeit [m]

* + 1. Wie groß ist die waagrechte Entfernung vom Abwurfort zur Aufprallstelle des Pa­kets? Leite eine Formel her.
		2. Wie groß ist die waagrechte Entfernung, wenn sich das Paket vertikal auf halber Ab­wurf­höhe befindet?
1. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $\left[0;50\right] $und $\left[454;504\right]$. Welche Bedeutung haben die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe?
2. Berechne die Änderungsrate bei $x=50 $ und $x=454$. Erläutere die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe.
	* 1. Berechne die mittlere Änderungsrate im in den Intervall $\left[0;a\right]$, wobei $a$ die waag­rechte Entfernung vom Abwurfort zur Aufprallstelle des Pa­kets ist. Erläutere das Er­gebnis im Kontext der Aufgabe.
		2. Berechne die erste Ableitung allgemein und interpretiere sie im Kontext.
		3. Zeichne den Graphen der Funktion $h$ und $h’$. Interpretiere jeweils deren Verlauf.
3. *L: 5,5s; 0,732m/s; 4,679m/s; 5,411m/s; 2,706m/s;* $sin\left(α\right)∙g∙t$

Kunigunde kommt gerade im neuen Cabrio, welches ihr Balduin zum Geburtstag ge­schenkt hat, vom Shopping nach Hause. Sie ist entsetzt. Anstatt wie versprochen den Rasen zu mähen, liegt Balduin gemütlich in einem Liegestuhl am Pool, liest ein Buch und genießt einen erfri­schenden Cocktail. Kunigunde steigt aus und vor lauter Empörung über diesen Affront, legt sie keinen Gang ein und zieht die Handbremse Kaum an. Das schlecht gesicherte Cabrio setzt sich auf der geneigten Einfahrt in Bewegung und rollt hinab. Nun bekommt Balduin einen Schreck und springt auf, … Die Einfahrt ist 15 m lang und hat eine Steigung von 10%. Der vom Cabrio zurück gelegte Weg $s$ (in m) zum Zeit­punkt $t$ (in s), wird durch die Funktion $s\left(t\right) $be­schrieben.

|  |  |
| --- | --- |
| $$s\left(t\right)=sin\left(α\right)∙\frac{g}{2}∙t^{2}$$ | $s$ … Weg [m], $α$ … Neigungswinkel, $g=9,81 {m}/{s^{2}}$ |

$$ $$

1. Zu welchem Zeitpunkt $t\_{E}$ prallt das Cabrio auf das Eingangstor und versetzt Balduin in einen Zustand zwischen tiefer Trauer und schierer Wut?
2. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Zeitintervallen $\left[0;1,5\right] $und $\left[t\_{E}-1,5;t\_{E}\right]$. Welche Bedeutung haben die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe?
3. Berechne die Änderungsrate zum Zeitpunkt $t\_{E}$ und die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall $\left[0;t\_{E}\right]$.. Erläutere die Ergebnisse im Kontext.
4. Bestimme die erste Ableitung allgemein und erläutere deren Bedeutung im Kontext.
5. Zeichne den Graphen der Funktion $s$ und $s’$. Interpretiere jeweils deren Verlauf.
6. Zeige, dass für die Durchschnittsgeschwindigkeit nach $t$ Sekunden gilt: $\overbar{v}=\frac{v\left(t\right)}{2}$
7. *L: 5,714°; 10%; 28,44s; 2,93m/s; 24,418m/s; 27,778m/s; 13,889m/s;* $sin\left(α\right)∙g∙t$

Balduin ist mit seinem Mountainbike unterwegs. Er steht am Beginn einer 395 m langen Ab­fahrt und lässt sein Bike losrollen. Am Ende der Abfahrt hat er eine Geschwindigkeit von 100 km/h erreicht. Cool wie Balduin nun einmal ist, hat er während der Abfahrt nicht gebremst.

|  |  |
| --- | --- |
| $$s\left(t\right)=sin\left(α\right)∙\frac{g}{2}∙t^{2}$$ | $s$ … Weg [m], $α$ … Neigungswinkel, $g=9,81 {m}/{s^{2}}$ |

1. Unter welchem Winkel war die Abfahrt geneigt? Wie groß ist die Steigung in Pro­zent? Wie lange dauert die Abfahrt?
2. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Zeitintervallen $\left[2;4\right] $und $\left[24;26\right]$. Welche Bedeutung haben die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe?
3. Berechne die Änderungsrate zum Zeitpunkt $t\_{E}$ und die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall $\left[0;t\_{E}\right]$.. Erläutere die Ergebnisse im Kontext.
4. Bestimme die erste Ableitung allgemein und erläutere deren Bedeutung im Kontext.
5. Zeichne den Graphen der Funktion $s$ und $s’$. Interpretiere jeweils deren Verlauf.
6. Zeige, dass für die Durchschnittsgeschwindigkeit nach $t$ Sekunden gilt: $\overbar{v}=\frac{v\left(t\right)}{2}$
7. *L: 123,735a; 258,017a; 0,059*$a^{-1}$*; 0,077*$a^{-1}; $*0,032*$a^{-1}; $*0,055*$a^{-1}$*; 0,077*$a^{-1}$*; 0,035*$a^{-1}$*; 42,649a; 0,077*$a^{-1}$*; 50%*

Im Jahr 1950 betrug die Weltbevölkerung 2,557 ⋅ 109 Menschen, im Jahr 2000 6,080 ⋅ 109 Menschen. Die Sättigungsgrenze der Weltbevölkerung wird mit 11,026 ⋅ 109 Men­schen ange­nommen. Zur Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung wird das logisti­sche Wachstums­modell heran gezogen. Die Größe der Weltbevölkerung (in Mrd) wird durch die Funktion $f$ beschrieben, wobei als Zeitpunkt $t=0$ das Jahr 1950 gewählt wird.

$$f\left(t\right)=\frac{a∙S}{a+\left(S-a\right)∙e^{-S∙k∙t}} f^{'}\left(t\right)=k∙f\left(t\right)∙\left(S-f\left(t\right)\right)$$

$a…$ Anfangswert zum Zeitpunkt $t=0$, $S$ … Sättigungsgrenze, $k$ … Konstante

1. Bestimme die Termdarstellung von $f$.
2. Wann überschreitet die Weltbevölkerung die 10 Mrd. bzw. 11 Mrd. Grenze?
3. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $\left[0;10\right]; \left[38;48\right] $ und $\left[110;120\right]$. Was beschreibt die mittlere Änderungsrate im Kontext?
4. Berechne die Änderungsrate zu den Zeitpunkten $t=0;$ $t=38$ und $t=110$.

Welche Bedeutung kommt der Änderungsrate im Kontext dieser Aufgabe zu?

1. Wann erreicht die Wachstumsgeschwindigkeit ihr Maxi­mum und wie groß ist dieses Maximum? Wie viel Prozent der Sättigungsgrenze sind zu diesem Zeitpunkt ausge­schöpft?
2. Interpretiere das Krümmungsverhalten von $f$ im Kontext.
3. Zeichne die Graphen der Funktionen $f$ und $f^{'} $im Bereich$ \left[0;120\right]$.
4. *L:* $N\_{1,2}\left(0\right); N\_{3}\left(0\right);T\left(0\right);H\left(600\right);W\left(300\right)$

Bauer Kunibert hat vor einigen Jahren begonnen Bio - Tomaten zu erzeugen und diese mög­lichst frisch zu vermarkten. In der Erntezeit stellt er Arbeiter zum pflücken der To­maten ein. Er dachte sich: „Wie mehr Arbeiter ich einstelle, desto mehr und schneller ernten sie.“ Er hatte je­doch mit diesem Ansatz nur mäßigen Erfolg. Ein Unternehmens­berater untersuchte den Sach­verhalt und er­stellte folgende Produktionsfunktion:

$$y\left(x\right)=-\frac{2}{45}x^{3}+2x^{2}$$

$y$ … Ertrag [ME Mengeneinheiten], $x$ … Anzahl der Arbeiter

* 1. Berechne die Nullstellen, die Extrempunkte und die Wendepunkte.
	2. Welche Bedeutung hat der Hochpunkt? Interpretiere das Monotonie­verhalten im Kontext. Wie kann es sein, dass der Ertrag abnimmt, wenn er die Anzahl der Arbeiter er­höht?
	3. Wie viele Arbeiter kann er maximal einstellen, wenn der Ertrag positiv sein soll?
	4. Welche Bedeutung hat der Wendepunkt? Interpretiere das Krümmungs­verhalten im Kontext. Bis zu welcher Anzahl von Arbeitern ist es sinnvoll mehr Arbeiter einzu­stellen?
	5. Zeichne die Graphen der Produktionsfunktion und der ersten Ableitung.
1. *L:*$ 0 \leq u \leq 1; $*1,25kg; 5kg; 11,25kg*

Kunigunde hat in ihrem Garten Himbeeren gepflanzt. Die Erntezeit be­trägt rund ei­nen Monat. Die folgende Funktion beschreibt den Nutzen in Abhängigkeit der insgesamt ge­ernteten Himbeeren.

$$u\left(x\right)=\sqrt{\frac{x}{20}} 0 \leq x \leq 20 $$

$x$ … Himbeeren [kg] $u$ … Nutzenindex $()$

1. Bestimme die Wertemenge der Funktion u. Zeichne die Graphen von $u$ und $u^{'}$.
2. Bei wie viel kg Himbeeren beträgt der Nutzenindex 0,25; 0,5 bzw. 0,75?
3. Interpretiere das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion $u$ im Kontext der Aufgabe.
4. Wann freut sich Kunigunde am meisten bzw. am wenigsten über zusätzlich geerntete Him­beeren?
5. *L:* $\left[381,025; 1342,192\right] $*80,09; 752,12; 1604,50;* $r\left(x\right)=\frac{3}{2}∙x^{-0,2}+\frac{200}{x}$

Folgende Funktion beschreibt die Ausgaben $N$ (in €/Monat) eines Haushalts für Nah­rungs­mittel in Abhängigkeit des monatlichen Gesamtkonsums $x$ (in €/Monat).

$$N\left(x\right)=\frac{3}{2}∙x^{0,8}+200 400\leq x\leq 4000$$

1. Bestimme die Wertemenge der Funktion $N$ und zeichne die Graphen von $N$ und $N^{'}$.
2. Bei wie viel €/Monat betragen die Ausgaben für Nahrungsmittel 400, 500 bzw. 750 €/Monat?
3. Interpretiere das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion $N$ im Kontext der Aufgabe. Warum ist diese Funktion rechtgekrümmt?
4. Stelle den relativen Anteil $r$ der Ausgaben für Nahrungsmittel als Funktion des Gesamt­kon­sums dar.
5. Interpretiere das Monotonie- und das Krümmungsverhalten der Funktion $r$ im Kontext. Welche Rück­schlüsse auf die sozialen Verhältnisse eines Haushalts lässt diese Funk­tion zu?
6. *L: 18,028; 3,527; [6,886;37,393]; 30,507; 70,593; 18,028; 7,055; 2,735; 55,007;*

Da die meisten Medikamente oral eingenommen werden, befindet sich der Wirkstoff eines Medi­kaments zunächst in einem Kompartiment (Verteilungsraum) $B$ (z.B. Mund, Magen oder Darm), aus dem er eliminiert wird und nach und nach in das Kompartiment $C$ (z.B. Blut) ge­langt. Der Konzentrationsverlauf in $C$ hängt von beiden Prozessen, Inva­sion (Aufnahme) aus B und Elimination via Stoffwechsel aus $C$, gleichzeitig ab. Die Bate­man - Funktion $c$ beschreibt den Konzentrationsverlauf in einem Kompartiment $C$ bei gleich­zeitiger Invasion (Aufnahme) und Elimination (Abgabe) in Abhängigkeit der Zeit $t$.

$$c\left(t\right)=b\_{0}∙\frac{k\_{1}}{k\_{2}-k\_{1}}∙\left(e^{-k\_{1}∙t}-e^{-k\_{2}∙t}\right) k\_{1}\ne k\_{2}; b\left(t\right)=b\_{0}∙e^{-k\_{1}∙t}$$

Die Funktion $b$ beschreibt die Elimination einer bestimmten Wirkstoffmenge aus dem Kom­partiment $B$ in Abhängigkeit der Zeit $t$. $b\_{0}$ ist die Anfangskonzentration im Kompartiment $B$ (Verabreichte Menge), $k\_{1}$ die Invasions-, $k\_{2}$ die Eliminations­geschwindigkeit. Für ein bestimmtes blut­drucksenkendes Medikament gilt: $k\_{1}=0,0532 h^{-1}, k\_{2}=0,0578 h^{-1}, b\_{0}=10 {m}/{l}$

1. Zeichne die Graphen der Funktionen $c$ und $b$ in ein Koordinatensystem [0; 72]. Interpretiere den Verlauf der Kurven, insbesondere das Monotonieverhalten der Funktion $c$, im Kontext der Aufgabe.
2. Zu welchem Zeitpunkt $t\_{max}$ ist die Konzentration maximal? Wie hoch ist die maximale Konzent­ra­tion? Wie hoch muss folglich die minimale toxische Kon­zentration mindestens sein?
3. Das Medikament wirkt so lange die minimale effektive Konzentration von 2,5 mg/l über­schrit­ten ist. Wie lange ist die Wirkungszeit des Medikaments? Wie lange dauert es bis das Medikament Wirkung zeigt (Latenzzeit)?
4. Der tolerierbare Rückstand des Medikaments beträgt 0,75 mg/l. Wann unterschrei­tet die Kon­zentration diesen Wert (Abklingzeit)?
5. Interpretiere das Krümmungsverhalten der Funktion $c$ im Kontext der Aufgabe.
6. Welchen Einfluss hat eine Verdoppelung der verabreichten Menge auf den Zeitpunkt der maximalen Konzentration, die maximale Konzentration, die Latenzzeit und Wir­kungs­dauer? Ist die Erhöhung der Dosis ein probates Mittel zur Erhöhung der Wir­kungsdauer?
7. *L: 0; 50 m; 68,629 m; 18,629 m; 108,723m;* $S\left(a-b\right)$

Ein Stahlseil ist an zwei Masten aufgehängt. Der Abstand der Masten beträgt 100 m. Die Spitzen der Masten sind durch $P\left(h\right)$ und $Q\left(h\right)$ gegeben. Wenn ein Seil an zwei Punkten befestigt und nur der Schwerkraft ausgesetzt ist, nimmt es die Form einer Ket­tenlinie an. Die Kettenlinie wird durch die Funktion $f(x)$ beschrieben, die Länge der Ket­tenlinie durch die Funktion $L(x)$.

$$f\left(x\right)=\frac{a}{2}∙\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)-b a=70;b=20$$

$$L\left(x\right)=\frac{a}{2}∙\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

* 1. Stelle die Kettenlinie für $-50\leq x\leq 50 $dar.
	2. An welcher Stelle hat das Seil den größten Durchhang? In welcher Höhe hängt das Seil an dieser Stelle?
	3. Berechne die Höhe $h$ der Masten. Wie groß ist der maximale Durchhang?
	4. Wie lange ist das Seil?
	5. Bestimme die erste Ableitung der Funktion $f$ und ihren Scheitelpunkt allgemein.
1. L: *0,142mg/min; 0,027mg/min; 0,114mg/min; 0,033mg/min;* $\frac{m}{k}$*; 5;* $\frac{ln\left(4\right)}{5} $

Ein Patient bekommt ein Medikament kontinuierlich per Infusion verabreicht. Pro Minute wird eine bestimmte Menge $m$ (in mg) verabreicht. Die Funktion $f$ beschreibt die Medikamentenmenge im Blut in Abhängigkeit der Zeit.

$$f\left(t\right)=\frac{m}{k}-\frac{m}{k}∙e^{-k∙t} mit k=\frac{ln\left(2\right)}{20} und m=\frac{ln\left(2\right)}{4} $$

1. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $\left[0;12\right] $ und $\left[48;60\right]$.

Was beschreibt die mittlere Änderungsrate im Kontext?

1. Berechne die Änderungsrate zu den Zeitpunkten $t=12$ und $t=48$.

Welche Bedeutung kommt der Änderungsrate im Kontext dieser Aufgabe zu?

1. Warum ist die Zunahme der Medikamentenmenge im Blut nicht unbegrenzt? Be­stimme den Grenzwert allgemein und dann für die gegeben Werte.
2. Aus therapeutischen Gründen soll sich über einen längeren Zeitraum ein Wert von rund 8 mg des Medikaments im Blut einstellen. Wie ist $m$ zu wäh­len?
3. Zeichne die Graphen von $f$ im Bereich $0\leq t\leq 120.$ Interpre­tiere den Verlauf.
4. Zeige durch Einsetzen der Termdarstellung, dass $f^{'}\left(t\right)=-k∙f\left(t\right)+m$
5. L: $c\left(t\right)=c\_{0}∙e^{-k∙t}$; -0,042$h^{-1}; $-0,028$h^{-1}$; -0,051$h^{-1}$; -0,001$h^{-1}$; 135,535h

Ein Herzpräparat beinhaltet als Wirkstoff Digoxin, der aus der Fingerhutpflanze (latei­nisch: Digitalis) gewonnen wird. Digoxin erhöht durch seine Wirkung auf die Herzmus­kelfasern Kraft und Wirkungsgrad des Herzmuskels. Es verbessert so die Herzfunktion und normalisiert den Herzrhythmus. Die Ausgangskonzentration beträgt 3 ng/ml. Bei einem Patienten mit normaler Nierenfunktion beträgt die Halbwertszeit 40,8 h.

1. Beschreibe die Abnahme der Medikamentenkonzentration $c$ mit Hilfe der natür­lichen Exponentialfunktion.
2. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $\left[0;24\right] $ und $\left[24;48\right]$.

Was beschreibt die mittlere Änderungsrate im Kontext?

1. Berechne die Änderungsrate zu den Zeitpunkten $t=0 $und $t=240$.

Was beschreibt die Änderungsrate im Kontext?

1. Nach wie vielen Stunden unterschreitet die Medikamentenkonzentration 10% des Ausgangswertes?
2. Zeichne die Graphen der Funktion $c$ und ihrer Ableitung im Bereich$ \left[0;240\right]$. Inter­pretiere das Krümmungsverhalten von $c$ im Kontext.
3. Zeige, dass folgende Beziehung gilt: $c^{'}\left(t\right)=-k∙c\left(t\right)$
4. *L:* $k=0,0001$*; 1092,362min; 0,01* ${cm^{2}}/{min}$*; 0,159* ${cm^{2}}/{min}$*; 0,018* ${cm^{2}}/{min}$*; 0,008* ${cm^{2}}/{min}$*; 0,158* ${cm^{2}}/{min}$*; 0,022* ${cm^{2}}/{min}$*; 546,181min; 0,16*${ cm^{2}}/{min}$*; 50%*

Eine Bakterienkolonie in einer 80 $cm^{2}$ großen Petrischale bedeckt zum Zeitpunkt $t=0 $ Minuten eine Fläche $B\left(0\right)=1 cm^{2} .$ Bei einer bedeckten Fläche von 40 $cm^{2}$ wurde eine Wachstumsrate von 0,16 ${cm^{2}}/{min} $festgestellt. Die Funktion $B$ beschreibt die bedeckte Fläche (in cm) in Abhängigkeit der Zeit.

$$B\left(t\right)=\frac{a∙S}{a+\left(S-a\right)∙e^{-S∙k∙t}} B^{'}\left(t\right)=k∙B\left(t\right)∙\left(S-B\left(t\right)\right)$$

$a…$ Anfangswert zum Zeitpunkt $t=0$, $S$ … Sättigungsgrenze, $k$ … Konstante

1. Bestimme die Termdarstellung von $B$.
2. Wann überschreitet die bedeckte Fläche einen Wert von 79 $cm^{2}$?
3. Berechne die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $\left[0;60\right]; \left[520;580\right] $ und $\left[960;1020\right]$. Was beschreibt die mittlere Änderungsrate im Kontext?
4. Berechne die Änderungsrate zu den Zeitpunkten $t=0;$ $t=520$ und $t=960$.

Welche Bedeutung kommt der Änderungsrate im Kontext dieser Aufgabe zu?

1. Wann erreicht die Wachstumsgeschwindigkeit ihr Maxi­mum und wie groß ist dieses Maximum? Wie viel Prozent der Sättigungsgrenze sind zu diesem Zeitpunkt ausge­schöpft?
2. Interpretiere das Krümmungsverhalten von $B$ im Kontext.
3. Zeichne die Graphen der Funktionen $B$ und $B^{'} $im Bereich$ \left[0;1400\right]$.